

ANNALEN DER PHYSIK

6. FOLGE * BAND 5, HEFT 6-8 * 1950

Die Bestimmung der dielektrischen und magnetischen Eigenschaften inhomogener Dielektriken, insbesondere biologischer Körper, im Dezimeterwellenbereich¹⁾. I

Theoretische Behandlung der Resonanzverfahren zur Bestimmung komplexer Widerstände und Materialien bei Dezimeterwellen

Von Hermann Schwan

(Mit 6 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

In der vorliegenden Arbeit werden nichtquasistationäre Resonanzmethoden behandelt. Einleitend wird erwähnt, daß Messungen mit quasistationären Methoden bis zu Wellenlängen von etwa 70 cm herab möglich sind. Voraussetzung dabei ist, daß sie sich nur auf die Ermittlung verlustfreier Widerstände erstrecken und gewisse Korrekturen, die durch den Beginn des nichtquasistationären Verhaltens bedingt sind, berücksichtigt werden.

Wegen der angegebenen Beschränkungen sind im Dezimeterwellengebiet nur nichtquasistationäre Methoden von praktischem Wert. Es wird daher im Hauptteil der Arbeit zunächst untersucht, welche Resonanzanordnungen von besonderem Interesse sind. Es sind dies die Verfahren mit induktiver Erregung. Hierbei sind nun wiederum fünf verschiedene Anordnungen möglich. Die drei praktisch wichtigen werden eingehend diskutiert.

Bei der ersten Anordnung (A) werden Sender und Empfänger mit dem Kurzschlußbügel, der die Leitungslänge variiert, verschoben. Der Betrag q des Reflexionskoeffizienten, der durch den zu bestimmenden Widerstand am anderen Leitungsende gegeben ist, kann auf verschiedene Weise ermittelt werden.

1. $\frac{1-q}{1+q} = \sqrt{\frac{i(\min)}{i(\max)}} = \frac{i(\min)}{i(\lambda/8)} = \frac{i(\lambda/8)}{i(\max)}$.
2. $2 \sin 2\pi \frac{\Delta l}{\lambda} = \frac{\pm (1-q^2)}{\sqrt{3q^2 + 2q^2 + 3q^2}}$.
3. $R_e(\min) = Z \frac{1-q}{1+q}$.

Darin sind $i(\max)$, $i(\min)$ und $i(\lambda/8)$ die vom Empfänger gemessenen Ströme bei Abstimmung auf Resonanz, Antiresonanz und den dazu um $\lambda/8$ verstimmtten Zustand. Δl ist die halbe Breite der symmetrischen Resonanzkurve, wobei diese Breite in 0,7facher Maximalhöhe gemessen wird. $R_e(\min)$ ist der zum maximalen Empfangsstrom proportionale Eingangswiderstand der Leitung. Die Phase φ

¹⁾ Gekürzter Auszug aus der Frankfurter Habilitationsschrift 1946. Vgl. a. 2).

²⁾ H. Schwan, Fiat-Report Nr. 1099.

des Reflexionskoeffizienten wird durch die Bedingung $\varphi - 2\alpha l = (2n + 1)\pi$ gegeben. Diese Beziehung ist identisch mit der Phasenbeziehung der anderen Resonanzverfahren und mit der der Abtastmethode. Der Nachteil des Verfahrens besteht darin, daß eine direkte Einwirkung des Senders S auf den Empfänger E schlecht vermeidbar ist und die Variation der Lage von S eine konstante Erregung erschwert.

Die zweite Anordnung (B) vermeidet diese Nachteile. Sender und Empfänger stehen fest, wobei letzterer zwischen S und Abschlußwiderstand R angeordnet ist. Der Nachteil dieser Anordnung ist, daß φ und q in komplizierter Weise von der Entfernung l_e des Senders von R abhängen. Nur bei optimaler Erregung erhält man die einfachen Formeln

$$\varphi - 2\alpha l = (2n + 1)\pi$$

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{\Delta l}{\lambda} = \frac{1 - q}{1 + q}$$

und, ebenso wie im Falle A,

$$R(\text{opt}) = Z \frac{1 - q}{1 + q}.$$

Experimentell ist die optimale Erregung erkennbar an dem bei ihr vorliegenden besonders großen Resonanzwert des Empfängerstromes und an der, einzig bei ihr vorliegenden, Symmetrie der Resonanzkurve.

Bei der Anordnung C steht S fest und E wird mit dem Kurzschluß verschoben. Diese Anordnung ist insofern als ideal zu bezeichnen, als sie die Nachteile der Fälle A und B vermeidet und in experimentell besonders einfacher Weise die Freihaltung der Empfängerableitung von Hochfrequenz ermöglicht. Für die Resonanzkurvenbreite, den Wert i (min): i (max) und die Phasenbeziehung gelten die gleichen Formeln wie beim Abtastverfahren:

$$\left(\frac{1 + q}{1 - q} \right)^2 = \left(\frac{i(\text{max})}{i(\text{min})} \right)^2 = 1 + \frac{1}{\sin^2 2\pi \frac{\Delta l}{\lambda}}$$

$$\varphi - 2\alpha l = (2n + 1)\pi.$$

Dies rührt daher, daß die durch Ortsvariation des Kurzschlusses feststellbare Längenabhängigkeit von $1/i$ identisch ist mit der Spannungsverteilung, wie sie bei der Abtastmethode ermittelt wird. Es besteht hier also eine starke formale Übereinstimmung mit der Abtastmethodik, wobei allerdings eine Minimumbreitenmessung durch eine Resonanzkurvenuntersuchung zu ersetzen ist.

In der Arbeit werden die Vorteile der Resonanzverfahren gegenüber der meist üblichen Methode der Spannungsabtastung dargelegt. Insbesondere wird nachgewiesen, daß die weitverbreitete Ansicht, nach der Resonanzverfahren bei wellenwiderstandsnahen Abschlußwiderständen ungeeigneter als das Abtastverfahren sein sollen, falsch ist.

In zwei späteren Arbeiten soll über den Einfluß von Halterungen am Ende von Lecherleitungen und über Auswerteverfahren zur Bestimmung von Stoffkonstanten nach der Resonanzmethode C berichtet werden.

I. Einleitung

Meßmethoden zur Bestimmung komplexer Widerstände, die auf den Resonanzeigenschaften von Schwingkreisen beruhen, sind im mittleren Frequenzgebiet bekanntlich vorwiegend in Gebrauch. Im Dezimeterwellenbereich dagegen ist dies nicht der Fall. Die meisten Arbeiten, die sich mit der Meßtechnik mit Hilfe von Lecher-Leitungen in offener und geschlossener Ausführung beschäftigen, setzen keine Abstimmung der Leitung auf Resonanz voraus. Das Studium der Resonanzkurve wird hierbei ersetzt durch eine Aufnahme der Spannungsverteilung längs der Leitung³⁾ 4). Hierbei ist insbesondere die Untersuchung des Minimums unerlässlich. Die Ausmessung des Minimums ist nun zweifellos mit wesentlich größeren Fehlermöglichkeiten behaftet als die bei einer Resonanzmethode an ihre Stelle tretende Messung der Resonanzkurvenhöhe und -breite. Dies gilt um so mehr, je geringer dämpfend der zu untersuchende Widerstand wirkt. Der Hauptgrund für die Entwicklung des jetzt üblichen „Abtastverfahrens“ ist in seiner einfachen mathematischen Grundlage zu erblicken. Es liegen mehrere Untersuchungen vor, die das Resonanzverfahren unter einschränkenden Voraussetzungen, z. B. der kleiner Kurvenbreite, behandeln⁵⁾. In der vorliegenden Arbeit wird eine umfassende theoretische Untersuchung durchgeführt mit dem Ziel, eine Form des Resonanzverfahrens zu finden, für die sich besonders einfache allgemein gültige Beziehungen ergeben.

Es sei hier nur kurz erwähnt (ausführliche Diskussion s. ²⁾), daß man auch im Dezimeterwellenbereich bis herab zu 70 cm mit quasistationären Resonanzmethoden an verlustfreien Dielektriken DK-Messungen vornehmen kann, wenn man die Abweichung der Verhältnisse vom quasistationären Zustand durch einen Korrekturfaktor erfaßt. Die Anwendung der Theorie, deren Brauchbarkeit an Hand von Versuchen nachgewiesen wird, auf leitende Dielektrika führt auf numerisch zu komplizierte Formen. Zur Bestimmung beliebiger komplexer Widerstände im Dezimeterwellengebiet kommen daher nur nichtquasistationäre Methoden in Frage.

II. Überblick über die möglichen nichtquasistationären Resonanzverfahren

Es liege eine Leitung in offener oder geschlossener Ausführung mit überall gleichem Wellenwiderstand vor. Das eine Ende der Leitung wird durch einen ver rückbaren Kurzschluß K , mit dessen Hilfe die Leitung zur Resonanz gebracht wird, abgeschlossen. Der zu bestimmende komplexe Widerstand \Re sei am anderen Leitungsende angeschlossen. Der Sender kann dann irgendwo zwischen \Re und K induktiv oder kapazitiv koppeln. Die durch ihn eingespeiste Spannung u findet zu beiden Seiten des Senders entsprechend den beiden Leitungsteilen einen beliebig komplexen Widerstand in Richtung nach \Re und einen rein imaginären Widerstand nach der Kurzschlußbrücke hin vor, wenn die Eigendämpfung der Leitung vernachlässigbar ist. Im Falle induktiver bzw. kapazitiver Ankopplung ergeben sich somit die in Abb. 1 skizzierten Ersatzschaltungen. Bei induktiver Kopplung wird in die Leitung eine Spannung induziert, für die der durch Verrücken von K variierbare rein imaginäre Leitwert $j\omega C_v$ und der Eingangswiderstand des anderen Leitungsteiles (durch die R, C -Kombination dargestellt) in Reihe geschaltet vor-

³⁾ O. Schmidt, Hochfrequenztechn. u. Elektroak. 41, 2 (1933).

⁴⁾ K. S. Knol u. I. O. Strutt, Physica IX, Nr. 6, 577 (1942).

⁵⁾ H. Brück, Telefunken-Z. 1943.

liegen. Bei kapazitiver Ankopplung sind C_v und die R, C -Kombination parallel geschaltet und die Hochfrequenzspannung liegt über der Koppelkapazität C_K an dieser Parallelschaltung. Man ersieht hieraus, daß bei eingepprägter Spannung die kapazitive Kopplung ein (imaginäres) Element C_K mehr enthält und somit

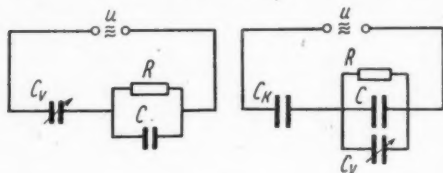


Abb. 1

eine Untersuchung irgendwelcher Ströme und Spannungen der Schaltung in Abhängigkeit von C_v bei kapazitiver Kopplung schwieriger sein muß als bei induktiver. Aus diesem Grunde wollen wir uns im folgenden auf die Resonanzmethoden mit induktiver Senderankopplung beschränken.

Wir werden dabei außerdem voraussetzen, daß die angekoppelte Spannung u als konstant anzusehen ist, sich also mit C_v nicht ändert. Diese Voraussetzung ist immer dann erfüllt, wenn die Senderankopplung so locker ist, daß Zieherscheinungen nicht auftreten können.

Bei induktiver Senderankopplung lassen sich die in Abb. 2 skizzierten fünf verschiedenen Anordnungen unterscheiden. Im Falle A sind Sender S und Empfänger E an der Kurzschlußbrücke angebracht und werden mit

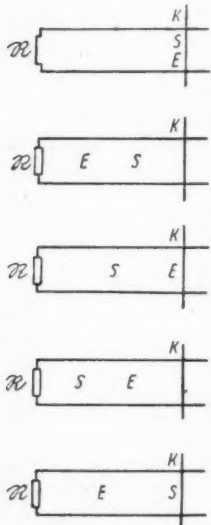


Abb. 2

dieser verrückt. Der Empfänger muß bei dieser Anordnung ebenfalls induktiv koppeln, da am Kurzschluß ein Strombauch und Spannungsknoten vorliegt und infolgedessen dort nur eine Strommessung möglich ist. Im Falle B sind Empfänger und Sender feststehend, wobei der Empfänger zwischen R und S angeordnet ist. Da die Spannungsverteilung zwischen R und S durch R allein bestimmt wird, muß E einen zum an der Stelle S vorliegenden Eintrittsstrom proportionalen Wert messen. Der Proportionalitätsfaktor kann hierbei nicht abhängig sein von der Stellung der Kurzschlußbrücke. Dabei ist es gleichgültig, ob der Empfänger kapazitiv oder induktiv angekoppelt ist. Es genügt daher, den Eingangswiderstand (bzw. dessen reziproken Wert) zu untersuchen, um die Eigenschaften der Resonanzkurve, die von E gemessen wird, zu erkennen. Im Falle D ist der Zusammenhang zwischen der durch E ermittelten Größe und dem Strom an der Stelle des Senders wesentlich komplizierter, da er von der Stellung der Kurzschlußbrücke abhängt. Da andererseits die Anordnung D in ihrem Aufbau keinerlei Vorzüge vor der Anordnung B aufweist, sei auf ihre ausführliche mathematische Diskussion verzichtet. Bei der Anordnung C steht der Sender fest, der Empfänger wird mit K verschoben und

muß, wie im Falle A, induktiv koppeln. Der Fall E zeigt eine ähnliche Anordnung, nur sind Sender und Empfänger gegenüber Fall C vertauscht. Die Anordnung E ist gegenüber der Anordnung C vor allem dann von Nachteil, wenn die Zuleitung zur Koppelschleife S aus Energiegründen mittels einer Resonanzvorrichtung abgestimmt wird. Denn bei Verschiebung von K werden die Fortpflanzungseigenschaften der von S über die Resonanzeinrichtung zum feststehenden Hochfre-

quenzgenerator führenden Leitungen infolge ihrer sich ändernden Lage eine Abänderung erfahren, die eine beträchtliche Variation des Stromes in S zur Folge haben kann. Die Forderung einer konstanten Erregung der Leitung ist daher schwer zu erfüllen. Bei der Anordnung C können entsprechende Schwierigkeiten nicht auftreten, wenn durch zweckmäßige Verblockung eines bei E direkt angebrachten Gleichrichters die wegführenden Leitungen frei von Hochfrequenz sind. Außerdem ist auch im Falle E der Zusammenhang zwischen dem Eintrittsstrom an der Stelle S und dem Strom an der Stelle E kompliziert. Daher sei in Anbetracht der mathematischen Komplizierung und der erwähnten Schwierigkeiten experimenteller Art von einer ausführlichen Behandlung des Falles E abgesehen.

In den folgenden Abschnitten soll nun die ausführliche Behandlung der Resonanzmethoden A, B und C erfolgen.

III. Theorie der Resonanzordnung, bei der Sender und Empfänger mit der Kurzschlußbrücke verschoben werden (Fall A)

Sind Sender und Empfänger mit der an einem Leitungsende befindlichen Kurzschlußbrücke fest verbunden, (Abb. 2, Anordnung A), so ergibt sich folgendes: Bezeichnet l die gesamte Leitungslänge, p den komplexen Spannungsreflexionskoeffizienten des Abschlußwiderstandes \Re_e , \Re den Wellenwiderstand und γ die Fortpflanzungskonstante der Leitung, so ist bekanntlich*)

$$\Re_e = Z \frac{1 + p e^{-2\gamma l}}{1 - p e^{-2\gamma l}} \quad (3a)$$

der am Ort der Kurzschlußbrücke K vorliegende Eingangswiderstand der Leitung. Wegen der vorausgesetzten vernachlässigbaren Eigendämpfung der Leitung darf $Z = Z$ (reell) und $\gamma = j\alpha = j \frac{2\pi}{\lambda}$ gesetzt werden. Wird zudem p in Betrag und Phase gemäß

$$p = \rho e^{j\varphi}$$

zerlegt, so geht (3a) über in

$$\Re_e = Z \frac{1 + \rho e^{j(\varphi - 2\alpha l)}}{1 - \rho e^{j(\varphi - 2\alpha l)}} \quad (3b)$$

Durch Multiplikation mit dem konjugiert komplexen Wert erhält man den Betrag von \Re_e :

$$R_e^2 = Z^2 \frac{1 + \rho^2 + 2\rho \cos(\varphi - 2\alpha l)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\varphi - 2\alpha l)} \quad (3c)$$

Der Empfänger E zeigt maximalen Strom an, wenn R_e seinen minimalen Wert erreicht. Der Nenner von Gl. (3c) hat seinen maximalen Wert, wenn $\cos(\varphi - 2\alpha l) = -1$ gilt, d. h. wenn $\varphi - 2\alpha l$ ein ungeradzahliges Vielfaches von π ist. Gleichzeitig erreicht der Zähler seinen Minimalwert. Die Resonanzbedingung lautet also

$$\varphi - 2\alpha l_0 = (2n + 1)\pi, \quad (3d)$$

*) F. Vilbig, Lehrbuch der Hochfrequenztechnik, 2. Aufl. Leipzig 1939.

wobei n eine beliebige ganze Zahl⁷ ist). Wegen der Symmetrie der Beziehung (3c) in $\alpha = 2\pi/\lambda = \omega/c$ und l ist es dabei gleichgültig, ob die Resonanz durch Variation von ω bei fester Stellung des Kurzschlusses K oder durch Verändern von l erreicht wird⁸). Experimentell ist die Resonanzeinstellung mittels l -Variation günstiger, da es nicht leicht ist, den Strom in der Koppelschleife S bei ω -Veränderung konstant zu halten. Durch Einsetzen der Bedingung (3d) in Gl. (3c) erhält man im Resonanzfall für den Eingangswiderstand R_e den reellen Wert:

$$R_e (\text{min}) = Z \frac{1 - \varrho}{1 + \varrho}. \quad (3e)$$

Bekanntlich tritt der Quotient $(1 - \varrho)/(1 + \varrho)$ beim Abtastverfahren als Wellenverhältnis $W = U (\text{min})/U (\text{max})$ in Erscheinung. Es folgt somit: Der Resonanzwert des Eingangswiderstandes und damit auch der reziproke Wert des Resonanzstromes im Empfänger sind proportional zu dem Wellenverhältnis W , das bei der Abtastmethode definiert ist. Verfügt man über ein Normal, das die Bestimmung des Proportionalitätsfaktors erlaubt, so kann man also mit Hilfe der Beziehungen (3d) und (3e) Betrag und Phase des Abschlußwiderstandes R_e bestimmen. Wir werden jetzt sehen, daß sich durch Messung der Resonanzkurvenbreite der Besitz dieses $(1 - \varrho)/(1 + \varrho)$ -Normales erübrigt.

Es sei nach dem l -Wert gefragt, für den der Empfängerstrom um $1/\sqrt{2}$ kleiner als der Resonanzstrom ist. Offenbar ist dies der Fall, wenn R_e den $\sqrt{2}$ -fachen Resonanzwert annimmt. Aus Gl. (3c) und (3e) folgt so die Bedingung

$$\frac{1 + \varrho^2 + 2\varrho \cos(\varphi - 2\alpha l_1)}{1 + \varrho^2 - 2\varrho \cos(\varphi - 2\alpha l_1)} = 2 \frac{(1 - \varrho)^2}{(1 + \varrho)^2}. \quad (3f)$$

Das Argument des cos-Gliedes ist dabei gleich $\varphi - 2\alpha l_1$. Darin ist l_1 der eine oder der andere der l -Werte, für die $i^2 = \frac{1}{2} i_{\text{max}}^2$ gilt. Wird durch $l_1 - l_0 = \Delta l$ die halbe Breite der Resonanzkurve eingeführt, so liefert die Anwendung des Additionstheorems der cos-Funktion wegen der Resonanzbedingung (3d)

$$\cos(\varphi - 2\alpha l_1) = \cos(\varphi - 2\alpha l_0 - 2\alpha \Delta l) = -\cos 2\alpha \Delta l.$$

Es sei nun in Gl. (3f) statt des cos-Ausdruckes $1 + \cos$ eingeführt und für

$$1 + \cos(\varphi - 2\alpha l_0) = 1 - \cos 2\alpha \Delta l = 2 \sin^2 \alpha \Delta l$$

gesetzt. So folgt die Formel

$$\frac{(1 - \varrho)^2 + 4\varrho \sin^2 \alpha \Delta l}{(1 + \varrho)^2 - 4\varrho \sin^2 \alpha \Delta l} = 2 \frac{(1 - \varrho)^2}{(1 + \varrho)^2}$$

und hieraus durch Auflösen nach dem sin-Ausdruck

$$2 \sin 2\pi \frac{\Delta l}{\lambda} = \pm \frac{1 - \varrho^2}{\sqrt{3\varrho - 2\varrho^2 + 3\varrho^3}}. \quad (3g)$$

Diese Gleichung läßt sich nicht explizit nach ϱ auflösen. Man wird sich daher helfen, indem man $\Delta l/\lambda$ als Funktion von ϱ graphisch darstellt und kann dann aus dieser

⁷) Diese Bedingung ist identisch mit der Phasenbeziehung, die bei der Abtastmethode benutzt wird⁴).

⁸) Das gleiche gilt natürlich auch für die folgenden Betrachtungen.

Darstellung mit Hilfe des experimentell gewonnenen $\Delta l/\lambda$ -Wertes den zugehörigen q -Wert entnehmen. Die Gl. (3g) zeigt, daß es möglich ist, Absolutmessungen von q allein durch Ermittlung von Resonanzkurvenbreiten vorzunehmen. Die beiden Vorzeichen sind durch die Tatsache bedingt, daß gemäß der Definition $\Delta l = l_1 - l_0$ zwei Δl -Werte zu beiden Seiten der Resonanzstelle mit verschiedenen Vorzeichen existieren. Weiter folgt, daß die Resonanzkurve symmetrisch ist, denn die beiden Δl -Werte unterscheiden sich nur in den Vorzeichen, nicht aber im Betrag.

Wie aus Gl. (3c) zu entnehmen ist, kann R_e für $q < 1$ die Werte Null und Unendlich nicht annehmen. Infolgedessen kann der Minimalwert des Stromes, der nach Gl. (3c) offenbar gegeben ist, wenn $q - 2 \times l = 2 n \pi$ gilt⁹⁾, niemals gleich Null sein. Es ist nun von Interesse, den Quotienten des Minimal- zum Maximalstrom zu bestimmen. Die Antiresonanzbedingung ergibt

$$R(\max) = Z \frac{1+q}{1-q} \quad (3h)$$

Der Quotient der Beziehungen (3e) und (3h) liefert

$$\frac{i(\min)}{i(\max)} = \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^2 \quad (3i)$$

Es ergibt sich somit die folgende Situation: Die bei Anwendung der diskutierten Resonanzmethode sich ergebende Abhängigkeit des Empfängerstromes von der Abstimmung ist periodisch. Sie gestattet die Bestimmung von q sowohl aus der Breite der Resonanzkurve als auch aus dem Verhältnis $i(\min):i(\max)$. Dieses ist gleich dem Quadrat des Wertes, den das Abtastverfahren liefert. Aus dem Gesagten folgt weiter: Die Messung des Halbwertes von i^2 ist nur so lange möglich, wie

$$\left(\frac{1+q}{1-q} \right)^4 > 2 \quad \text{bzw.} \quad q > 0,086 \quad (3k)$$

gilt. Bei kleinen q -Werten wird man daher wie beim Abtastverfahren vorgehen und den Quotienten $i(\min):i(\max)$ bestimmen, bei größeren q -Werten dagegen ist die Ausmessung der Resonanzkurve zweckmäßiger, da dann das Minimum klein ist und seine Bestimmung demgemäß zunehmend schwieriger wird. Damit ist die weit verbreitete Ansicht, daß das Resonanzverfahren vorwiegend für wellenwiderstandsferne und das Abtastverfahren für wellenwiderstandsnähere Widerstände brauchbar ist, widerlegt. Beide Verfahren sind vielmehr weitgehend gleichwertig. Sie gestatten die Bestimmung des Betrages des Reflexionskoeffizienten von R sowohl durch Bestimmung des Quotienten aus einer Minimal- und Maximal-Ablesung als auch durch Ausmessung einer Kurvenbreite. Das Quotientenverfahren ist bei der Resonanz- und Abtastmethode vorwiegend für die wellenwiderstandsähnlichen Widerstände geeignet, das Ausmessen der Kurvenbreite empfiehlt sich bei den wellenwiderstandsfernen Abschlußwerten von R . Bei dem letzteren Verfahren für stark wellenwiderstandsungleiche R -Werte differenziert sich nun allerdings der Gebrauchswert der Methoden. Das Resonanzverfahren ist hier der Abtastmethode stark überlegen, da

⁹⁾ Der Vergleich dieser Antiresonanzbedingung mit der Resonanzbedingung (3d) zeigt, daß sich die Minimal- und Maximalwerte des Empfängerstromes in $\lambda/4$ -Abstand befinden.

1. die Minimum-Untersuchung des Abtastverfahrens in eine Maximum-Untersuchung übergeht. Infolgedessen ist eine weniger große Empfindlichkeit des Empfängers notwendig und die Störanfälligkeit desselben geringer. Dieser wesentliche Vorteil ist um so größer, je mehr R vom Wellenwiderstand abweicht.

2. beim Resonanzverfahren die Meßleitung sich stärker als bei der Abtastmethode, bei der die Leitung im allgemeinen nicht in Resonanz ist, erregt und hierdurch ein weniger empfindlicher Empfänger notwendig ist. Viele Anordnungen, die dem Verfasser bekannt wurden und nach dem Abtastverfahren arbeiten, setzen sich durch Abstimmungsmittel, die an der Leitung angebracht sind, in den Besitz der Vorteile, die durch den Resonanzzustand gegeben sind. Solche Anordnungen verbinden die Mittel der Resonanzmethode mit denen des Abtastverfahrens, stellen daher komplizierte Aggregate dar, ohne alle Vorteile der Resonanzmethode aufzuweisen.

3. bei sehr geringen Dämpfungen die Bestimmung der Kurvenbreite wegen ihrer geringen Größe bei beiden Verfahren durch Meßfehler beeinflusst wird. Gerade in solchen Fällen ist das Resonanzverfahren wegen des besonders großen Maximum-Wertes einfacher und genauer.

4. Bei der Resonanzanordnung brauchen konzentrische Leitungen nicht geschlitzt zu werden. Die mit der exakten Führung des Abtastorgans verbundenen Schwierigkeiten und, damit zusammenhängend, der vor allem bei langen Leitungen erforderliche Aufwand an Halterungen sind wesentlich geringer.

Der Nachteil des Resonanzverfahrens A ist darin zu erblicken, daß eine direkte Einwirkung des Senders auf den Empfänger schwer zu vermeiden ist. Sie kann

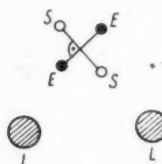


Abb. 3

verhindert werden etwa durch eine Anordnung wie in Abb. 3. Die Sender- und Empfänger-Koppelschleifen SS und EE kreuzen sich unter 90° und bilden mit der durch die Drähte einer Doppeldrahtleitung LL bestimmten Ebene einen Winkel von 45° . Eine andere Möglichkeit besteht darin, Sender und Empfänger zu trennen und den Empfänger in $\lambda/2$ Entfernung vom Kurzschluß so anzubringen, daß er sich in gleicher Weise wie dieser bewegt. Die diskutierte Resonanzmethode hat noch einen anderen Nachteil: Zur Ausbiegung von Oberwellen

wird die Zuleitung vom Sender zur Erregerspule S zweckmäßig abgestimmt. Wird nun die Kurzschlußbrücke mit der Spule S verschoben, so wird durch Änderung der Lage der Energieleitung die Abstimmung gestört und somit die Forderung konstanter Erregung der Leitung verletzt. Es sollen daher in den folgenden Abschnitten die Resonanzverfahren erörtert werden, bei denen die Spule S feststeht und vom Empfänger E räumlich getrennt angeordnet ist.

Die Gl. (3e) und (3h) bestimmen R_e für den Fall der Abstimmung auf Resonanz und im Antiresonanzfall. Es ist außerdem von Interesse, R_e zu berechnen, wenn $\varphi - 2\alpha l = (2n + \frac{1}{2})\pi$ gilt, d. h. wenn um $\lambda/8$ gegen den Resonanzfall verstimmt wird. Hierfür folgt aus Gl. (3c) wegen $\cos(\varphi - 2\alpha l) = 0$

$$R_e \left(l_0 + \frac{\lambda}{8} \right) = Z. \quad (3l)$$

Dieser Wert ist das geometrische Mittel der bei Resonanz und Antiresonanz vorliegenden Werte. Der Wert $(1 - \varrho)/(1 + \varrho)$ läßt sich daher aus den Stromwerten

im Resonanzfall, Antiresonanzfall und dem dazu um $\lambda/8$ verstimmten Zustand auf drei verschiedene Weisen bestimmen. Es gilt

$$\frac{1 - \varrho}{1 + \varrho} = \sqrt{\frac{i(\min)}{i(\max)}} = \frac{i(\min)}{i(\lambda/8)} = \frac{i(\lambda/8)}{i(\max)}. \quad (3m)$$

Welche der drei Formen am zweckmäßigsten ist, muß von den jeweils vorliegenden i -Werten abhängig gemacht werden. Bei kleinem Minimum z. B. wird die dritte Form, bei sehr geringer Welligkeit die erste vorzuziehen sein.

IV. Die Resonanzanordnung mit feststehender Senderankopplung und festem Empfänger, letzterer zwischen Sender und Abschlußwiderstand (Fall B). Abb. 4

Befinden sich Senderankopplung und Empfänger am gleichen Ort, so mißt der Empfänger den Eingangsstrom. In jedem Falle wird die Strom- und Spannungsverteilung zwischen \Re und S bis auf einen reellen Proportionalitätsfaktor bekanntlich allein durch \Re bestimmt, wenn die Frequenz konstant bleibt. Beschränken wir uns daher im folgenden auf den Fall, daß die Resonanzabstimmung durch Längenvariation der Leitung erfolgt, so mißt (l_e ist konstant!) der Empfänger einen zum Eingangsstrom und damit auch zum Leitwert $1/\Re_e$ proportionalen Wert, wenn er sich zwischen \Re und S befindet. Aus diesem Grunde genügt die Diskussion des Eingangswiderstandes \Re_e , um das Verhalten des Empfängerstromes zu überblicken.

Der Eingangswiderstand setzt sich hierbei aus den Teilwiderständen, die links und rechts von S vorliegen, additiv zusammen. Analog wie bei der Anordnung A folgt nach Auftrennung des Real- und Imaginärteils von Gl. (3b)

$$\Re_e = Z \left[\frac{1 - \varrho^2 + j 2 \varrho \sin(\varphi - 2 \alpha l_e)}{1 + \varrho^2 - 2 \varrho \cos(\varphi - 2 \alpha l_e)} + j \operatorname{tg} \alpha l \right]. \quad (4a)$$

Da der Realteil dieses Ausdruckes nicht von l abhängig ist, erreicht der Betrag von \Re_e seinen Minimalwert, wenn der imaginäre Bestandteil verschwindet. Die Resonanzbedingung lautet daher

$$\operatorname{tg} \alpha l_0 = - \frac{2 \varrho \sin(\varphi - 2 \alpha l_e)}{1 + \varrho^2 - 2 \varrho \cos(\varphi - 2 \alpha l_e)}. \quad (4b)$$

Der dann gegebene Minimalwert von \Re_e ist reell und hat den Wert

$$R(\min) = Z \frac{1 - \varrho^2}{1 + \varrho^2 - 2 \varrho \cos(\varphi - 2 \alpha l_e)}. \quad (4c)$$

Man sieht, daß der Resonanzwiderstand abhängig von der Entfernung des Senders S vom Ende \Re ist. Dies ist verständlich: Koppeit S in einem Strom-Maximum der von \Re her diktierten Wellenverteilung an, so wird die Leitung am stärksten erregt, d. h. $R(\min)$ muß seinen kleinsten Wert in Abhängigkeit von l_e erreichen. Dies ist der Fall, wenn

$$\varphi - 2 \alpha l_e = (2n + 1)\pi \quad (4d)$$

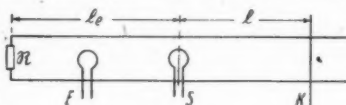


Abb. 4

gilt, wie man der Gl. (4c) entnehmen kann. Wir wollen im folgenden diese Einstellung von S als die Stellung optimaler Kopplung bezeichnen. Für sie gilt

$$R(\text{opt.}) = Z \frac{1 - \varrho}{1 + \varrho} \quad (4e)$$

und, wie aus Gl. (4b) folgt, die Resonanzbedingung $\text{tg } \alpha l_0 = 0$ bzw.

$$\alpha l_0 = m\pi. \quad (4f)$$

Bei optimaler Kopplung hat also $R(\text{min})$ den gleichen Wert wie bei der Methode A. Auch für die Gesamtlänge der Leitung $l + l_0$ ergibt sich im Resonanzfall bei optimaler Kopplung der alte Wert, denn die Vereinigung von Gl. (4d) mit (4f) liefert die mit (3d) identische Beziehung

$$\varphi - 2\alpha l_0 - 2\alpha l_0 = (2n + 1)\pi - 2m\pi = [2(n - m) + 1]\pi.$$

Das Ergebnis (4e) läßt sich auch anschaulich begreifen: Bezeichnet A die Amplitude des durch den Sender in die Leitung einduzierten und nach beiden Seiten von S fortlaufenden Wellenzuges, so wird infolge der totalen Reflexion von K längs der gesamten Leitung eine Überlagerung dieser beiden Wellenzüge vorliegen. Beide Wellenzüge werden an R mit der Amplitude ϱA reflektiert und diese reflektierten Wellen an K wiederum total reflektiert. Die Amplitude ϱA ist also vierfach vertreten, wobei aber nur zwei Amplituden von Wellen gerühren, die auf R zulaufen. Diese letzteren bedingen wiederum vier Amplituden $\varrho^2 A$ usw. usw. Im Resonanzfall verstärken sich in den Maximis alle diese Amplituden. Die resultierende maximale Gesamtamplitude hat daher den Wert

$$A_g = 2A + 4\varrho A + 4\varrho^2 A + \dots = 2A [1 + 2\varrho(1 + \varrho + \varrho^2 + \dots)]$$

$$A_g = 2A \left[1 + 2\varrho \frac{1}{1 - \varrho} \right] = 2A \frac{1 + \varrho}{1 - \varrho}$$

d. h. sie ist proportional $\frac{1 + \varrho}{1 - \varrho}$ ¹⁰⁾.

Der durch Gl. (4a) gegebene Maximalwiderstand ist nicht wie im Fall der Anordnung A endlich, sondern nimmt für $\alpha l = (2n + 1)\pi/2$, also für um $\lambda/4$ gegen Resonanz verstimmte Zustände, den Wert ∞ an. Infolgedessen kann eine Minimum-Maximum-Methode zur Bestimmung von ϱ bei der Anordnung B nicht angewandt werden. Dies ist hingegen bei $\lambda/8$ Verstimmung gegen Resonanz möglich. Unter der Voraussetzung optimaler Kopplung folgt hierfür aus Gl. (4a)

$$\Re\left(\frac{\lambda}{8}\right) = Z \left[\frac{1 - \varrho}{1 + \varrho} + j \right]$$

$$R\left(\frac{\lambda}{8}\right) = Z \sqrt{\left(\frac{1 - \varrho}{1 + \varrho}\right)^2 + 1}.$$

Durch Quotientenbildung dieser Formel mit Gl. (4e) erhält man

$$\begin{aligned} \frac{i(\text{opt.})}{i(\lambda/8)} &= \frac{R(\lambda/8)}{R(\text{opt.})} = \sqrt{1 + \left(\frac{1 - \varrho}{1 + \varrho}\right)^2} \\ \left(\frac{1 + \varrho}{1 - \varrho}\right)^2 &= \left[\frac{i(\text{opt.})}{i(\lambda/8)}\right]^2 - 1. \end{aligned} \quad (4g)$$

¹⁰⁾ In diesem Zusammenhang sei darauf aufmerksam gemacht, daß von H. Zahn, Ann. Physik 80, 182 (1926), die gleiche Überlegung mitgeteilt wird, jedoch mit dem unrichtigen Resultat $A_g = \frac{2A}{1 - \varrho}$. Der Fehler rührt daher, daß die Amplituden $A, \varrho A, \varrho^2 A \dots$ alle nur doppelt angesetzt wurden.

Die Gl. (4g) gestattet in einfacher Weise die Bestimmung von $W = \frac{1-\rho}{1+\rho}$ aus zwei Amplitudenmessungen.

Aus dem Vorgesagten ergibt sich die folgende Situation: Bei optimaler Kopplung steht die gesamte Leitungslänge in einfachem Zusammenhang mit der Phase des Reflexionskoeffizienten von \mathfrak{R} . Ist jedoch die Kopplung nicht optimal, so ist die Resonanzbedingung (4b) und damit auch die gesamte Leitungslänge $l_0 + l_e$ eine Funktion von l_e , d. h. die gesamte Leitungslänge ändert sich, wenn der Ort von S verschoben wird. Dies läßt sich qualitativ verständlich machen. Bevor wir jedoch ausführlicher hierauf eingehen, seien zur Vorbereitung dessen einige Ausführungen von grundsätzlicher Bedeutung gebracht.

Bei den bisherigen Betrachtungen der Resonanzphänomene wurde so vorgegangen, daß der durch die Vierpoltheorie bekannte mathematische Apparat herangezogen wurde. Dies ging so vor sich, daß die bekannten Formeln über den Eingangswiderstand eines Vierpols auf die speziell betrachteten Resonanzanordnungen angewandt wurden. Dabei war vollkommen von den Vorgängen abgesehen, die sich auf den Leitungen selbst abspielen. Die Diskussion dieser Vorgänge bietet eine zweite Möglichkeit, eine Resonanztheorie zu entwickeln. Ein Beispiel hierfür ist die weiter oben angegebene Berechnung der Maximalamplitude im Resonanzfall (S. 262). Es ist indessen zu sagen, daß man bei der Verfolgung dieses Weges auf größere mathematische Schwierigkeiten stößt und daß daher der beschrittene, wenn auch formale Weg einfacher ist. Die Betrachtung der Leitungsvorgänge jedoch ist von großem anschaulichem Wert. Sie erlaubt viele Phänomene qualitativ zu verstehen, die auf andere Weise unverständlich bleiben. Hierzu gehört u. a. das Phänomen der Abhängigkeit der gesamten Resonanzlänge von der Stellung von S . Es sei daher im folgenden Absatz näher auf die Vorgänge auf der Leitung eingegangen.

Von S werden dauernd fortschreitende Wellenzüge nach \mathfrak{R} und K ausgesandt. Bei \mathfrak{R} findet eine teilweise, bei K eine totale Reflexion dieser Wellen statt. Die von K total reflektierte Welle läuft über S hinaus nach \mathfrak{R} zurück, wird dort geschwächt und wiederum reflektiert. Ebenso wird die von \mathfrak{R} rücklaufende Welle nach K geworfen usw. Insgesamt ergibt sich somit eine Summe unendlich vieler Wellen auf der Leitung. Diese Summe besitzt einen endlichen Wert, da die Wellen mit fortschreitender Zahl der Reflexionen an \mathfrak{R} in geometrischer Progression geschwächt werden. Der Faktor der so bedingten geometrischen Reihe wird dabei durch den Reflexionskoeffizienten von \mathfrak{R} bestimmt, ist also komplex. Die Wellenverteilung zwischen S und \mathfrak{R} wird bis auf einen Proportionalitätsfaktor nur durch \mathfrak{R} bestimmt, da von \mathfrak{R} nach S nur durch \mathfrak{R} reflektierte Wellen laufen. Zu diesen gesellen sich in gleicher Richtung die bei S neu eininduzierten Wellen. Infolgedessen ist die Wellenverteilung zwischen S und K eine andere als die zwischen S und \mathfrak{R} . Auf Grund derselben Überlegung folgt, daß sie zwischen S und K nur von K bestimmt wird. Da an der Kurzschlußbrücke K totale Reflexion vorliegt, muß diese Verteilung durch eine sin-Kurve darstellbar sein, also auf Null durchgreifen. An der Stelle S schließen diese beiden Verteilungen ohne Sprung aneinander an. Es liegt also längs der ganzen Leitung eine Verteilung der in Abb. 5 skizzierten Art vor. Daß die Wellenverteilung zwischen S und \mathfrak{R} nicht bis auf die Null-Linie durchgreift, rührt davon her, daß die auf \mathfrak{R} treffende Welle in zwei Teile gespalten wird. Der eine dient zur Deckung der in \mathfrak{R} in Wärme umgesetzten Energie, der andere wird reflektiert und überlagert sich mit einem gleichgroßen Teil der ein-

fallenden Welle zu einer stehenden Verteilung. Infolgedessen besteht neben einer stehenden Welle zwischen R und S noch eine fortlaufende Welle, die das Minimum der Wellenverteilung auf ein von Null verschiedenes Niveau anhebt.

Auf Grund des Vorgesagten ist das Resonanzverhalten der Leitung verständlich. Die Erregung der Leitung hängt von verschiedenen Faktoren ab. Sie wird am kräftigsten sein, wenn die von K und R bestimmten stehenden Wellenverteilungen in der Phase übereinstimmen und wenn S in einem Strombauch ankopplt. Die Identität der Phase beider Wellenzüge wird durch die Gl. (3d) ausgedrückt, die Kopplung in einem Strombauch durch Gl. (4d) oder (4f). Ist die Kopplung nicht optimal, so wird mit Verrücken des Kurzschlusses K aus der durch Gl. (3d) definierten Lage und mit der dadurch bedingten Verschiebung des durch K bestimmten Teiles der Stromverteilung der Strombauch dieser Verteilung nach S hin- oder weggeschoben und damit die induktive Erregung verstärkt oder geschwächt. In unmittelbarer Nähe der von der Leitung bei optimaler Kopp-

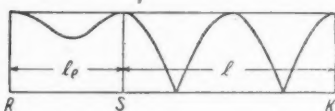


Abb. 5

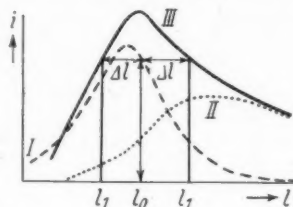


Abb. 6

lung geforderten Resonanz wird die Zunahme der Erregung durch bessere Kopplung die Abnahme, die aus der Verletzung von Gl. (3d) resultiert, zunächst überwiegen und infolgedessen eine Verlagerung der Resonanzstelle zustande kommen. Wir können diesen Effekt auch so darstellen: Die Leitung fordert eine Resonanzkurve *I* (Abb. 6), deren Maximum der Gl. (3d) genügt. Außerdem ist für die Betrachtung die Kurve *II* wichtig, die die Stärke der Erregung in Abhängigkeit von der Lageverstimung des Senders S gegen den Ort maximaler Kopplung darstellt. Die Überlagerung dieser Kurve *II* mit der an sich symmetrischen Resonanzkurve *I*, die die Leitung von sich aus fordert, liefert die vom Empfänger wahrgenommene Kurve *III*. Sie ist nur dann symmetrisch, wenn die symmetrischen Kurven *I* und *II* ihre Maxima am gleichen Ort besitzen, d. h. wenn optimale Kopplung vorliegt. Ist dies nicht der Fall, so ergibt sich eine unsymmetrische Kurve *III*, deren Maximum zwischen dem der Kurven *I* und *II* liegt. Offenbar weicht die Lage des Maximums der resultierenden Kurve *III* von der Resonanzkurve um so mehr ab, je flacher die Kurve *I* ist und je größer der Abstand der Maxima der Kurven *I* und *II* ist, wie man sich an Hand der Darstellung klarmachen kann. Alle diese qualitativen Folgerungen können analytisch bestätigt werden²⁾.

Für die Resonanzkurvenbreite ergibt sich nur im Falle optimaler Kopplung ein einfacher Ausdruck:

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{\Delta l}{\lambda} = + \frac{1-q}{1+q}. \quad (4h)$$

(Nähere Diskussion s. 2).)

Wir wenden uns nun der Diskussion einer Resonanzmethode zu, die die Abhängigkeit von Resonanzkurvenbreite und Resonanzlänge vom Ort der Senderkopplung S nicht aufweist.

V. Die Resonanzanordnung mit feststehender Senderankoppelung und mit der Kurzschlußbrücke verbundenem Empfänger (Fall C)

Wegen der gleichen Stellung des Senders wie im Falle B wird der Eingangswiderstand \Re_e auch im Falle C durch Gl. (4a) ausgedrückt. Jedoch ist der Empfängerstrom jetzt nicht mehr mit dem Eingangsstrom identisch oder proportional dazu. Da zwischen S und E die Verteilung durch K bestimmt wird (Abb. 5), gilt vielmehr für den Zusammenhang zwischen Empfängerstrom i_E und Eintrittsstrom i_S

$$i_S = i_e \cos \alpha l. \quad (5a)$$

Wegen $i_S = U/\Re_e$ folgt hieraus

$$i_e = \frac{U}{\Re_e \cos \alpha l}. \quad (5b)$$

Aus Gl. (5b) folgt, daß die Untersuchung von $\Re_e \cos \alpha l$ im vorliegenden Fall C der von \Re_e im Falle B entspricht. Unter Weglassung des Arguments $\varphi - 2\alpha l_e$ gilt also:

$$\Re_e \cos \alpha l = Z \left[\frac{(1 - \varrho^2) \cos \alpha l}{1 + \varrho^2 - 2\varrho \cos \alpha l} + j \left(\frac{2\varrho \sin \alpha l \cos \alpha l}{1 + \varrho^2 - 2\varrho \cos \alpha l} + \sin \alpha l \right) \right]. \quad (5c)$$

Das Studium dieser Beziehung erscheint schwieriger als das der Beziehung (4a), da nunmehr auch der Realteil von l abhängig ist und die Resonanzbedingung somit nicht einfach durch das Verschwinden des imaginären Teiles festgelegt wird. Indessen ergibt die Berechnung des Betrages von $\Re_e \cos \alpha l$ einen einfachen Wert. Es folgt nach kurzer Rechnung unter Einführung von $L = l + l_e$ (gesamte Leitungslänge) (s. ²⁾)

$$\left| \frac{\Re_e \cos \alpha l}{Z} \right|^2 = \frac{1 + \varrho^2 + 2\varrho \cos(\varphi - 2\alpha L)}{1 + \varrho^2 - 2\varrho \cos(\varphi - 2\alpha l_e)}. \quad (5d)$$

Resonanz liegt vor, wenn der Zähler möglichst klein wird, also wenn

$$\cos(\varphi - 2\alpha L_0) = -1 \text{ bzw. } \varphi - 2\alpha L_0 = (2n + 1)\pi. \quad (5e)$$

Diese Bedingung ist identisch mit der der Anordnung A und mit der der Anordnung B im Falle optimaler Kopplung. Sie ist unabhängig davon, ob optimal erregt wird oder nicht. Dies ist als ein großer Vorteil der Resonanzanordnung C anzusehen. Im Resonanzfall gilt

$$\left| \frac{\Re_e \cos \alpha l}{Z} \right|^2 = \frac{(1 - \varrho)^2}{1 + \varrho^2 - 2\varrho \cos(\varphi - 2\alpha l_e)}. \quad (5f)$$

Bei optimaler Erregung, für die die gleiche Bedingung wie im Falle B gilt, wird dieser Wert am kleinsten:

$$\Re_e \cos \alpha l = Z \frac{1 - \varrho}{1 + \varrho}. \quad (5g)$$

Im Antiresonanzfall, d. h. im Falle größten Wertes $\Re_e \cos \alpha l$, muß $\varphi - 2 \alpha L = 2 n \pi$ gelten, d. h. die Antiresonanzstellen und die Resonanzstellen liegen in $\lambda/4$ -Abstand. Auch dies entspricht der im Falle A vorgefundenen Situation. Es folgt hierfür aus Gl. (5d)

$$\left| \frac{\Re_e \cos \alpha l}{Z} \right|_{\max} = \frac{(1 + \varrho)^2}{1 + \varrho^2 - 2 \varrho \cos (\varphi - 2 \alpha l_e)}. \quad (5h)$$

Bei optimaler Erregung wird $\Re_e \cos \alpha l = Z$. Der Quotient der Beziehungen (5f) und (5h) ergibt das von dem Ort der Ankopplung S unabhängige Resultat

$$\frac{i(\min)}{i(\max)} = \frac{\Re_e \cos \alpha l(\min)}{\Re_e \cos \alpha l(\max)} = \frac{1 - \varrho}{1 + \varrho}. \quad (5i)$$

Die Resonanzkurvenbreite $2 \Delta l$, die durch die Stromwerte $i = 1/\sqrt{2} i(\max)$ festgelegt wird, folgt aus der Vereinigung von (5d) mit (5f):

$$\frac{2(1 - \varrho)^2}{1 + \varrho^2 - 2 \varrho \cos} = \frac{1 + \varrho^2 + 2 \varrho \cos (\varphi - 2 \alpha L)}{1 + \varrho^2 - 2 \varrho \cos}$$

Hieraus folgt:

$$(1 - \varrho)^2 = 2 \varrho + 2 \varrho \cos (\varphi - 2 \alpha l).$$

Wegen

$$\cos (\varphi - 2 \alpha l) = \cos (\varphi - 2 \alpha l_0 - 2 \alpha \Delta l) = -\cos 2 \alpha \Delta l$$

$$1 + \cos (\varphi - 2 \alpha l) = 1 - \cos 2 \alpha \Delta l = 2 \sin^2 \alpha \Delta l$$

ist dies identisch mit

$$\sin 2 \pi \frac{\Delta l}{\lambda} = \pm \frac{1 - \varrho}{2 \sqrt{\varrho}}. \quad (5k)$$

Aus Gl. (5k) folgt weiter

$$1 + \sin^2 2 \pi \frac{\Delta l}{\lambda} = 1 + \frac{(1 - \varrho)^2}{4 \varrho} = \frac{(1 + \varrho)^2}{4 \varrho}.$$

Division dieser Gleichung mit der Beziehung für $\sin^2 2 \pi \Delta l / \lambda$ liefert den Zusammenhang von $\Delta l / \lambda$ und $(1 - \varrho) / (1 + \varrho)$:

$$\left(\frac{1 + \varrho}{1 - \varrho} \right)^2 = 1 + \frac{1}{\sin^2 2 \pi \frac{\Delta l}{\lambda}}. \quad (5l)$$

Gl. (5k) läßt außerdem erkennen: Die Resonanzkurve ist symmetrisch, ihre Breite ist unabhängig vom Ort der Ankopplung S .

Der Zusammenhang zwischen Resonanzkurvenbreite und ϱ sowie der Zusammenhang des Quotienten $i(\min)/i(\max)$ mit ϱ (Gl. 5k und 5i) ist der gleiche wie er bei der Abtastmethode zwischen der Minimumbreite sowie dem Wellenverhältnis mit ϱ besteht. Dieses für alle ϱ -Werte exakt gültige Ergebnis unserer Untersuchungen ist nicht zufällig. Es rührt davon her, daß der Zähler der Gl. (5d) bis auf einen konstanten Faktor identisch ist mit der Spannungsverteilung, die bei dem Abtastverfahren gewonnen wird *) und der Nenner unabhängig von L ist. Da aber der Zähler umgekehrt proportional zum Empfängerstrom ist, folgt das wichtige Ergebnis: Die bei Variation der Kurzschlußbrücke sich ergebende Längenabhängigkeit des reziproken Wertes vom Empfängerstrom ist identisch mit der bei dem Abtastverfahren meßbaren Spannungsverteilung. Dieser Satz stellt eine Verbindung zwischen dem Resonanzverfahren C und dem Abtastverfahren her. Aus ihm folgen die bereits oben festgestellten Zusammenhänge zwischen Wellen-

verhältnis sowie Minimumbreite und dem Stromverhältnis $i(\min):i(\max)$ sowie der Resonanzkurvenbreite. Damit folgt weiter: Der einzige Unterschied zwischen der Abtastmethode und dem Resonanzverfahren C besteht in dem Ersatz der Ausmessung des Minimums durch die Untersuchung der Resonanzkurve. Alle Einzelheiten der Auswertung sind dieselben, d. h. der mathematische Apparat zur Ermittlung von ρ und φ besitzt gleichen Umfang. Über die Vorteile der Maximummessung des Resonanzverfahrens gegenüber der Minimumuntersuchung des Abtastverfahrens bei stark wellenwiderstandsungleichen Abschlußwiderständen wurde bereits obengesprochen. Weiter erkennt man aus Gl. (5d): Nur der Nenner der Gleichung ist von l_e abhängig. Und zwar ist, von einem Phasenunterschied des trigonometrischen Arguments um π abgesehen, der Nenner in gleicher Weise von l_e wie der Zähler von L abhängig. Daraus folgt, daß man bei unverrücktem Kurzschluß K die Stromverteilung längs der Leitung durch Verrücken der Senderankopplung S ermitteln kann. Man kann also durch Variation der Lage von S gleiche Resultate wie bei der Abtastmethode erhalten.

Frankfurt a. M., Kaiser-Wilhelm-Institut für Biophysik.

(Bei der Redaktion eingegangen am 9. Juni 1949.)

**Die Bestimmungen der dielektrischen und magnetischen Eigenschaften
inhomogener Dielektriken, insbesondere biologischer Körper,
im Dezimeterwellenbereich¹⁾. II**

Der Einfluß von Halterungen am Ende von Lecherleitungen

Von Hermann Schwan

(Mit 3 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, wie eine am Ende einer Meßleitung befindliche Halterung bei der Bestimmung von Blindwiderständen zu berücksichtigen ist. Die Ergebnisse können wie folgt formuliert werden:

1. Läßt sich die Halterung durch eine verlustlose, vom Abschluß praktisch unabhängige Kapazität C_0 ersetzen, so folgt für den ohne Berücksichtigung der Halterung begangenen Relativfehler der Wert $\text{tg } (2\pi/\lambda) l_0 \cdot \text{tg } (2\pi/\lambda) (l + l_0)$, wenn l und l_0 die durch Abschluß und Halterung bedingten Verschiebungen der Spannungsverteilung sind. Der Relativfehler ist also vor allem bei den Abschläüssen groß, die eine große Verschiebung bedingen. Er muß, dies ist das Ergebnis einiger quantitativer Angaben, bei nicht gut abgeglichenen Halterungen unbedingt erfaßt werden.

2. Eine Halterung ist nur dann reflexionsfrei, wenn die durch sie bedingten Verschiebungen der Spannungsverteilung bei offenem und geschlossenem Leitungsende den gleichen Betrag haben, und umgekehrt bedingt Gleichheit der Verschiebungen Reflexionsfreiheit. Die Spannungsverteilung bei Leerlauf ist dann genau um $\lambda/4$ gegen die bei Kurzschluß vorliegende verschoben.

3. Jede Halterung, deren Wellenwiderstand kleiner als der der Leitung ist, („kapazitive“ Halterung) kann durch eine dem Abschluß parallel geschaltete Kapazität ersetzt werden. Diese Kapazität ist um so geringer vom Abschluß abhängig, je dünner die Halterung und je kleiner ihr DK-Wert sowie ihr Wellenwiderstand ist. Sie ist monoton abhängig von der durch den Abschluß bedingten Verschiebung. Es werden die Beziehungen für den Einfluß der Halterung und die Größe der Ersatzkapazität abgeleitet. Ferner wird angegeben, wie das Wellenwiderstandsverhältnis einfach bestimmt werden kann.

4. Jede Halterung, deren Wellenwiderstand größer als der der Leitung ist, („induktive“ Halterung) kann durch eine mit dem Abschluß in Reihe gelegte Selbstinduktion ersetzt werden. Im Gegensatz zu der Ersatzkapazität kapazitiver Halterungen ist diese Selbstinduktion stark vom Abschluß abhängig. Während also bei nicht zu schlecht abgeglichener kapazitiver Halterung dieselbe in guter

¹⁾ Auszug aus der Frankfurter Habilitationsschrift²⁾.

²⁾ H. Schwan, Fiat Report Nr. 1099.

Näherung durch eine konstante Kapazität darstellbar ist, kann Entsprechendes bei induktiven Halterungen nicht durchgeführt werden.

5. Die Wirkung einer ideal kapazitiven Halterung kann auch bei beliebigem komplexem Leitungsabschluß leicht angegeben werden. Die Korrektur der Leitfähigkeitskomponente, die durch die Halterung bedingt wird, ist gering. Sie ist am größten für $W = 0$ und für große W -Werte praktisch gleich Null. Die Korrektur der Blindkomponente dagegen ist für $W = 0$ zwar geringer als die Leitfähigkeitskorrektur, wird mit ansteigendem W ebenfalls zunächst kleiner, um dann aber beträchtlich anzusteigen. Die Erfassung der durch die Halterung bedingten Korrekturen geschieht am einfachsten dadurch, daß in den ohne Halterungen gültigen Gleichungen die Verschiebungsgröße l um den durch die Halterung bedingten Wert l_0 vermehrt und die Blindkomponente um die Halterungskapazität C_0 korrigiert wird.

I. Einleitung

Meßleitungen, mit deren Hilfe komplexe Widerstände bei Dezimeterwellen bestimmt werden können, werden meist konzentrisch ausgeführt und arbeiten nach dem Abtastverfahren. Bei diesem wird mit einer längs der Leitung gleitenden Sonde die Spannungsverteilung aufgenommen. Es ist hierbei besonders wichtig, daß der Abstand der auf dem Außenleiter beweglichen Sonde vom Innenleiter bei der Führung der Sonde exakt eingehalten wird, d. h. daß die Lage des Innenleiters an keiner Stelle auch nur geringfügig exzentrisch ist. Bei Leitungen mit einer Gesamtlänge von mehr als 1 m, wie sie für Messungen mit Wellenlängen über 50 cm erforderlich sind, kann dies nur mit Hilfe mehrerer Stützen erreicht werden. Die Bedeutung einer solchen Halterung für die Spannungsverteilung längs einer Leitung hängt nicht nur von ihren Dimensionen, sondern auch von ihrer Lage bezüglich der Spannungsverteilung ab. So gibt es „kapazitive“ Halterungen, die vor allem in einem Spannungsbauch, und „induktive“ Halterungen, die in einem Strombauch die Verteilung beeinflussen (s. u.). Da nun die Lage der Spannungs- und Stromverteilung eine Funktion des Abschlußwiderstandes ist, folgt eine Abhängigkeit der störenden Wirkung einer an beliebiger Stelle der Leitung angebrachten Halterung vom Abschlußwiderstand. Die Herleitung handlicher Formeln, die die Störung charakterisieren, ist nicht einfach. Bedarf die Leiteranordnung gar mehrerer Leiterhalterungen, und dies ist wie gesagt bei den Leitungen für den angegebenen Wellenbereich der Fall, so wird die mathematische Berechnung des Einflusses aller dieser an den verschiedensten Stellen der Spannungsverteilung befindlichen Halterungen praktisch unmöglich.

Die Überwindung dieser Schwierigkeiten kann grundsätzlich auf zwei verschiedene Weisen erreicht werden. Die erste besteht darin, die Störung der einzelnen Halterungen zu beseitigen. Dies erfordert eine Angleichung des Wellenwiderstandes in der Halterung an den Wellenwiderstand der Leitung, da dann bekanntlich ²⁾ keine Reflexion der auf die Halterung auftreffenden Wellen an dieser erfolgen kann und allein solche Reflexionen für die unerwünschten Störungen verantwortlich sind. Über die verschiedenen Möglichkeiten, den Wellenwiderstand der Halterung zu prüfen und über die Konstruktionen, die einen möglichst einwandfreien Wellenwiderstandsangleich gewährleisten, liegen mehrere Arbeiten

²⁾ O. Schmidt, Hochfrequenztechn. u. Elektroak. 41, 2 (1933).

vor⁴⁾). Die durch eine Halterung bedingte kapazitive Belastung der Leitung kann durch entsprechende Änderung der Leiterdurchmesser verringert werden. Diese wird zweckmäßig so erfolgen, daß die hierbei gleichzeitig hervorgerufene Induktivitätsänderung der Leiter so bemessen ist, daß der Quotient L/C , der den Wellenwiderstand allein bestimmt, sich nicht ändert. Die so gegebene Ausführung einer Halterung (s. Abb. 1) läßt sich rechnerisch nur festlegen, wenn der Verlauf der elektrischen Kraftlinien überall rechtwinklig zu den Leitern erfolgt. Leider ist aber an der Stelle der sprunghaften Änderung der Leiterdimensionen ein recht komplizierter Verlauf gegeben, der keine Voraussagen erlaubt. Der so bedingte Wellenwiderstand der Halterung kann nur experimentell ermittelt werden. Die Herstellung einer einwandfreien Halterung kann somit nur dadurch erfolgen, daß die Halterung schrittweise verändert wird, bis die nach jeder Änderung durchgeführte experimentelle Prüfung Brauchbarkeit ergibt. Da die Anfertigung guter Halterungen also nicht einfach und vor allem ihr Abgleich umständlich ist, wird man versuchen, mit möglichst wenig Halterungen auszukommen. Damit kommen wir zu der zweiten Möglichkeit, den Halterungsschwierigkeiten zu begegnen. Diese besteht in der Verwendung einer einzigen Halterung an einer Stelle der Leitung, an der ihr Einfluß relativ leicht überblickt werden kann.

Im Teil I dieser Arbeit ⁵⁾ hat der Verfasser gezeigt, daß es entgegen anderen Ansichten durchaus möglich ist, mit einer einzigen am Ende der Leitung angebrachten Halterung auszukommen, wenn ein geeignetes Meßverfahren gewählt wird. In der folgenden Abhandlung wird nun der Einfluß einer solchen Halterung berechnet und angegeben, wie er erfaßt und bei der Bestimmung des Abschlußwiderstandes eliminiert werden kann. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Halterung aus einem einwandfreien Isolationsmaterial hergestellt und ihre Wirkung auf die Leitung infolgedessen durch einen Vierpol ohne Ohmsche Glieder darstellbar ist.

An den Stellen des Ein- und Austrittes der längs der Leitung laufenden Wellenzüge in und aus der Halterung werden Teile dieser Wellenzüge reflektiert. Dieser Reflexionsvorgang kann in seiner Wirkung auf die Spannungsverteilung längs der Leitung auch durch die Existenz einer dem Abschlußwiderstand parallel geschalteten Kapazität oder eine mit dem Abschluß in Reihe geschaltete Selbstinduktion erklärt werden. Es läßt sich nämlich stets eine Kapazität bzw. Induktivität angeben, die eine Phasendrehung der am Ende reflektierten Welle bewirkt, so daß der reflektierte Wellenzug genau so verläuft wie die Überlagerung der bei nicht vorhandener Kapazität rücklaufenden Welle mit den von Anfang und Ende der Halterung rückgeworfenen Wellen. Diese die Wirkung der Halterung darstellende Kapazität bzw. Induktivität ist verlustlos anzusetzen, solange der die Halterung darstellende Vierpol, wie vorausgesetzt, keine dämpfenden Glieder besitzt.

Die Belastung der Leitung mit einer verlustlosen Kapazität ist vor allem auf die Phasenverteilung und weniger auf die Amplitude der Spannung längs der Leitung von Einfluß. Die Phasenverteilung wird aber bei nicht zu großem Leitwert des Abschlusses in erster Linie durch die Blindkomponente des Abschlußwiderstandes bestimmt. Hieraus könnte man folgern, daß die durch die Halterung bedingte Störung vor allem bei der Bestimmung des Blindanteiles des Abschlußwiderstandes berücksichtigt werden muß. Aus diesem Grunde ist in der vorliegenden Arbeit der Einfluß der Halterung zunächst auf reine Blindwiderstände als

⁴⁾ A. Weissfloch, Hochfrequenztechn. u. Elektroak. 60, 76 (1942).

⁵⁾ H. Meinke, Hochfrequenztechn. u. Elektroak. 61, 145 (1943).

⁶⁾ H. Schwan, Ann. Physik (6) 5, 253 (1950).

besonders wichtig betrachtet und hauptsächlich behandelt worden. Die Beschränkung auf rein imaginäre Abschlußwiderstände hat zudem den Vorteil, die folgende Theorie wesentlich zu vereinfachen und bedingt relativ leicht zu übersehende Ergebnisse. Nur bei Vorliegen spezieller Halterungsarten ist der Einfluß dieser Halterungen auf die Komponenten eines beliebig komplexen Abschlusses leicht erfaßbar. Dies wird am Beispiel der „ideal kapazitiven“ Halterung ausgeführt. An diesem Beispiel wird gezeigt, daß entgegen der soeben entwickelten Anschauung auch der Realteil des Abschlusses durch die Halterung stark beeinflußt werden kann.

Im folgenden Abschnitt der Arbeit soll zunächst der Einfluß einer verlustlosen Kapazität behandelt werden. In den darauf folgenden Betrachtungen wenden wir uns sodann der Frage zu, in welcher Weise die die Halterung ersetzende Kapazität vom Abschlußwiderstand abhängt. Die Behandlung dieses Problems erfordert die Heranziehung der Vierpoltheorie der Leitung und führt zu wesentlichen Erkenntnissen bez. der Bestimmung der Halterungsstörung und der Möglichkeit ihrer Eliminierung zwecks einwandfreier Bestimmung imaginärer Abschlußwiderstände.

II. Der Einfluß einer Kapazität am Ende der Leitung auf die Bestimmung rein imaginärer Abschlußwiderstände

Der rein imaginäre Abschlußwiderstand sei durch eine positive oder negative Kapazität C , der die Halterung ersetzende Kondensator durch eine Kapazität C_0 dargestellt. Ohne Abschlußwiderstand bewirkt C_0 eine Verschiebung l_0 gemäß der Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{l_0}{\lambda} = Z \omega C_0. \quad (2a)$$

Mit Abschlußwiderstand erhöht sich die Verschiebung der Spannungsverteilung um die meßbare Strecke l . Es gilt für diese

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{l + l_0}{\lambda} = Z \omega (C + C_0). \quad (2b)$$

Die Anwendung des Additionstheorems der tg-Funktion auf Gl. (2b) und die Verwendung von (2a) führt zu

$$\begin{aligned} Z \omega (C + C_0) &= \frac{\operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda} + Z \omega C_0}{1 - Z \omega C_0 \cdot \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda}} \\ Z \omega C &= \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda} \frac{1 + (Z \omega C_0)^2}{1 - Z \omega C_0 \cdot \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda}}. \end{aligned} \quad (2c)$$

In Unkenntnis der Störung durch C_0 würde man C nach der Gleichung

$$Z \omega C_f = \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda} \quad (2d)$$

bestimmen und den falschen Wert C_f erhalten. Uns interessiert vor allem der auf C_f bezogene Relativfehler, der bei der C -Bestimmung nach Gl. (2d) erfolgt. Er ist der nach $C_f = \frac{1}{Z \omega} \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda}$ aufgelösten Gl. (2c)

$$C_f = \frac{C}{1 + \operatorname{tg} 2\pi \frac{l_0}{\lambda} \cdot \operatorname{tg} 2\pi \frac{l + l_0}{\lambda}} \quad (2e)$$

zu entnehmen und hat den Wert

$$\frac{\Delta C}{C_f} = \frac{C - C_f}{C_f} = \operatorname{tg} 2\pi \frac{l_0}{\lambda} \cdot \operatorname{tg} 2\pi \frac{l + l_0}{\lambda}. \quad (2f)$$

Hieraus ersieht man: Der prozentuale Fehler, den man bei Vernachlässigung der Halterungskapazität C_0 begeht, ist proportional C_0 , mehr als linear abhängig von der durch $C + C_0$ bedingten Gesamtverschiebung und mehr als quadratisch abhängig von ω . Das Überraschende dieses Ergebnisses ist darin zu sehen, daß vor allem bei großen Kapazitäten C , also bei geringem Anteil der Halterungskapazität an der Gesamtkapazität, der Einfluß von C_0 groß ist. Die Erklärung hierfür ist darin zu erblicken, daß bei großem C und damit großem l nach Gl. (2b) C empfindlich gegen geringe Änderungen des Argumentes des tg -Ausdruckes ist und die Fortlassung von l_0 hierin demgemäß sich stark bemerkbar macht.

Aus Gl. (2f) folgt weiterhin, daß für sehr kleine Kapazitäten C und damit l -Werte in der Nähe von Null der Fehler keineswegs Null wird, sondern den endlichen Wert $\operatorname{tg}^2 2\pi l_0/\lambda$ annimmt. Der Relativfehler wird erst Null, wenn $l = -l_0$ gilt, d. h. wenn l negativ wird bzw. eine Induktivität L die Leitung abschließt. Wie ist dies zu verstehen? Aus der Forderung $l = -l_0$ folgt Gleichheit der Widerstandsbeträge von Induktivität und Halterungskapazität und somit Abschluß der Leitung mit dem unendlich hohen Widerstand eines Sperrkreises. Die Induktivität L macht somit die durch C_0 bedingte Wirkung wieder rückgängig und muß daher mit l_0 bzw. l in dem gleichen einfachen Zusammenhang wie C_0 stehen, d. h. sie kann nach der primitiven Formel (2a) oder (2d) bestimmt werden, wobei $1/\omega C = -\omega L$ einzuführen ist.

Ist C_0 bzw. l_0 bekannt, so läßt sich die durch die Halterung bedingte Störung nach Gl. (2f) in einfacher Weise bestimmen. Bei einer Halterung, in der die Leiter zwecks Angleich des Wellenwiderstandes der Halterung an den der Leitung verdünnt fortlaufen, ist nicht ohne weiteres selbstverständlich, daß C_0 eine vom Abschluß unabhängige Größe ist. Es ist daher nicht möglich, aus einem Versuch mit einem bekannten C nach Gl. (2e) l_0 zu bestimmen und anzunehmen, daß bei allen anderen Messungen dieser l_0 -Wert gültig ist. Wir müssen daher nunmehr untersuchen, inwieweit l_0 als konstant zu betrachten ist bzw. durch welche Beziehungen Gl. (2e) zu ersetzen ist, wenn man auf vom Abschluß unabhängiger Parameter nicht verzichten will.

III. Wirkung einer dünnen Halterung bei Leerlauf und Kurzschluß

In diesem Abschnitt sei eine einfache Theorie einer verlustlosen Halterung

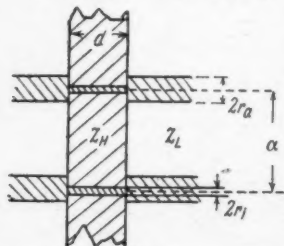


Abb. 1

am Ende der Leitung gebracht, in der angegeben wird, wie groß l_0 bei Leerlauf und Kurzschluß ist. Sie ist auf den in praxi immer gegebenen Fall beschränkt, daß die Halterung nur einen geringen Teil der Wellenverteilung aufnimmt bzw. daß die Dicke der Halterung klein gegen die Wellenlänge im Material der Halterung ist. Die Halterung selbst bestehe aus einer Isolierstütze, in der die Leiter in bekannter Weise mit verändertem Querschnitt fortgeführt werden. In Abb. 1 ist die für Doppelleitungen zweckmäßige Ausführung skizziert.

Unter der gemachten Voraussetzung hinreichend kleiner Dicke der Isolierscheibe wirkt bei offenem Leitungsende die Halterung lediglich durch ihre kapazitive Belastung der Leitung. Da dann am Ort der Halterung ein Minimum der Stromverteilung vorliegt, kann sich die abgeänderte Induktivität der Leiter nicht bemerkbar machen. Umgekehrt wird bei kurzgeschlossenem Leitungsende nur die in der Halterung erfolgte Änderung der Leiterinduktivität und nicht deren Kapazität auf den Strom- und Spannungsverlauf längs der Leitung einwirken. Werden mit C_H und C_L bzw. L_H und L_L die Kapazitäts- und Induktivitätswerte der Leiter pro Längeneinheit inner- und außerhalb der Halterung bezeichnet und mit Δl bzw. Δk die Verschiebung der Spannungsverteilung durch die Halterung bei offenem bzw. kurzgeschlossenem Ende⁷⁾, so gilt

$$(L_H - L_L) d = \Delta k L_L \quad (3a)$$

$$(C_H - C_L) d = \Delta l C_L \quad (3b)$$

Die erste der beiden Gleichungen folgt so: $(L_H - L_L) d$ ist die gesamte durch die Halterung bedingte Änderung der Induktivität, verglichen mit dem Fall, daß L in der Halterung unverändert bleibt. Dieser Zuwachs an L muß durch eine gleich große Selbstinduktionsabnahme am Ende der Leitung wettgemacht werden, wenn die Spannungsverteilung längs der Leitung unverändert und damit der alte Erregungszustand wiederhergestellt werden soll. Dies kann durch eine Kürzung Δk des Endes der Leitung erreicht werden, wobei Δk natürlich so groß gewählt werden muß, daß die gesamte Induktivität des Stückes $\Delta k \cdot L_L$ gleich dem Induktivitätszuwachs in der Halterung ist. Dies führt zu Gl. (3a). Wird die Leitung am Ende nicht um Δk gekürzt, so muß dafür das andere Ende gekürzt werden, wenn man ein Resonanzverfahren voraussetzt. Auf jeden Fall wird die Spannungsverteilung um den nicht gekürzten Betrag Δk zum Ende hin wandern. In entsprechender Weise folgt Gl. (3b).

Es werde gefordert $\Delta l = \Delta k$. Dann folgt aus den Gl. (3a) und (3b)

$$\frac{L_H}{L_L} = \frac{C_H}{C_L} \text{ bzw. } Z_H = Z_L \quad (3c)$$

Da die Gleichheit der Wellenwiderstände Z_H und Z_L bekanntlich eine reflexionsfreie Halterung verbürgt, gilt somit: Sind die durch die Halterung bedingten Längenänderungen in Leerlauf und Kurzschluß gleich, so ist die Halterung reflexionsfrei. Damit ist gezeigt, daß eine C -Zunahme in der Halterung erlaubt ist, so lange sie mit einer entsprechenden L -Zunahme verbunden ist. Hieraus folgt, daß im Leerlauf nur die Kapazitätsdifferenz $(C_H - C_L) d$ reflektierend wirken kann, wenn die Halterung nicht abgeglichen ist und infolgedessen ihre Kapazität mit der reflexionsfrei wirkenden, aus Gl. (3c) berechenbaren Kapazität C_Z nicht übereinstimmt. Dieser Kapazitätswert muß durch entsprechende Änderung der Leitungslänge Δl ersetzt werden, wenn die Leitung ohne Halterung gedacht wird. Dabei muß aber noch berücksichtigt werden, daß die Wellenverkürzung im Material um den Faktor $\sqrt{\epsilon \mu}$ zu einem weiteren Längengewinn von $(\sqrt{\epsilon \mu} - 1) d$ führt. Insgesamt folgt so für den Leerlauf

$$\Delta l \cdot C_L = (C_H - C_Z) d + (\sqrt{\epsilon \mu} - 1) d \cdot C \quad (3d)$$

Dabei ist bekanntlich

$$C_H = K \frac{\epsilon}{\lambda n \frac{a}{r_H}}; \quad C_L = K \frac{1}{\lambda n \frac{a}{r_L}}; \quad C_Z = K \frac{\epsilon}{\lambda n \frac{a}{r_Z}} \quad (3e)$$

⁷⁾ Δl ist mit dem l_0 -Wert für kleinste Belastungen identisch.

wobei K ein Proportionalitätsfaktor ist und r_Z der Radius des Leiters, der die Halterung reflexionsfrei wirken läßt. Aus Gl. (3c) folgt für diesen unter Benutzung der Gl. (3e) und entsprechender Formeln für L_L und L_Z :

$$\frac{\mu \ln \frac{a}{r_L}}{\frac{\epsilon}{\ln a/r_Z}} = \frac{\ln \frac{a}{r_L}}{1} \rightarrow \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{a}{r_Z} = \ln \frac{a}{r_L}. \quad (3f)$$

Verwenden wir die Gl. (3f), um in dem Ausdruck für $C_Z r_Z$ durch r_L zu ersetzen, so folgt

$$C_Z = \sqrt{\epsilon \mu} \frac{K}{\ln \frac{a}{r_L}} = \sqrt{\epsilon \mu} C_L \quad (3g)$$

und unter Einsetzung dieses in Gl. (3d) wieder die Beziehung (3a). Die Beziehung (3a bzw. (3d) läßt sich also auf zwei verschiedene Weisen ableiten: 1. An die Leitung wird einmal die Halterung, dann $\Delta l \cdot C_L$ als Kapazität angelegt und dabei Δl so verlangt, daß die Belastung in beiden Fällen die gleiche ist. Was dabei in der Halterung geschieht, weiß die Meßleitung nicht; 2. Der über C_Z hinausgehende Wert von C_H wird als störend empfunden und die durch ihn bedingte Verschiebung berechnet, wobei die Wellenlängenänderung im Material der Halterung berücksichtigt werden muß. — Beide Betrachtungen sind gleichwertig, ganz analog für den Kurzschlußfall durchführbar und führen zu denselben Beziehungen.

Die Differenz $\Delta l - \Delta k$ erscheint als Mangel derjenigen Verschiebung an $\lambda/4$, die die Spannungsverteilung bei Übergang von Leerlauf zu Kurzschluß erfährt. Sie ist daher mit dem l_0 -Wert für Kurzschluß identisch und eine besonders wichtige Größe, da sie gemessen werden kann, ohne daß die Halterung entfernt werden muß, was nur in den seltensten Fällen möglich ist. Aus (3a) und (3b) folgt

$$\Delta l - \Delta k = \left(\frac{C_H}{C_L} - \frac{L_H}{L_L} \right) \alpha. \quad (3h)$$

Gilt Gl. (3c), so wird, wie schon oben gesagt, $\Delta l - \Delta k = 0$. Die Differenz $\Delta l - \Delta k$ als Funktion der Leiterdimensionen folgt, wenn man in Gl. (3h) die Beziehung (3e) einarbeitet:

$$\Delta l - \Delta k = \left(\epsilon \frac{\ln \frac{a}{r_L}}{\ln \frac{a}{r_H}} - \mu \frac{\ln \frac{a}{r_H}}{\ln \frac{a}{r_L}} \right) d. \quad (3i)$$

Werden in Gl. (3h) an Stelle der L - und C -Werte die Wellenwiderstände

$$Z_H = \sqrt{\frac{L_H}{C_H}} \quad Z_L = \sqrt{\frac{L_L}{C_L}}$$

eingeführt, so erhält man

$$\Delta l - \Delta k = \left(\sqrt{\frac{C_H}{L_H} \frac{L_L}{C_L}} - \sqrt{\frac{L_H}{C_H} \frac{C_L}{L_L}} \right) \sqrt{\frac{C_H}{C_L} \frac{L_H}{L_L}} d$$

$$\Delta l - \Delta k = \frac{v_L}{v_H} \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L} \right) d.$$

Darin sind v_L und v_H die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in Luft und Halterung. Ihr Quotient hat den Wert $\sqrt{\epsilon \mu}$, also wird

$$\Delta l - \Delta k = \sqrt{\epsilon \mu} \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L} \right) d. \quad (3k)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung ist es möglich, aus $\Delta l - \Delta k$ das Verhältnis der Wellenwiderstände zu bestimmen.

Die vorliegenden Ergebnisse beweisen, daß die in Abschnitt 2 eingeführte Größe l_0 bei Leerlauf und Kurzschluß verschieden anzusetzen ist, wenn Δk von Null verschieden ist. Nach Gl. (3a) ist dies der Fall, wenn L_L von L_H abweicht. Die einfache Theorie des Abschnittes 2 ist dann nicht als streng gültig zu betrachten. Es ist daher erforderlich, die Wirkung einer Halterung mit abgeändertem L einer ausführlichen Untersuchung zu unterwerfen. Dies kann durch das Studium der Vierpoleigenschaften einer Halterung geschehen.

IV. Strenge Theorie einer dämpfungsfreien Halterung

Bei den folgenden Betrachtungen wird bezeichnet

$$T_H = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\varepsilon \mu} d, \quad T_L = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} l. \quad (4a)$$

Dabei ist l die Länge der Meßleitung vom der Leitung abgewandten Ende bis zum Eintritt in die Halterung. T_H ist eine für die Halterung, T_L für die ungestörte Leitung charakteristische Größe. H. Metzler hat nun gezeigt, daß aus den Vierpolegleichungen der am Ende mit einer verlustlosen Halterung und einer Kapazität C belasteten Leitung die Beziehung

$$Z \omega C = \frac{1 - \frac{Z_L}{Z_H} T_H T_L}{\frac{Z_H}{Z_L} T_H + T_L} \quad (4b)$$

folgt. Wir wollen dieses Ergebnis jetzt verwenden und es etwas umformen. Zu diesem Zwecke sei an Stelle der Länge l die Verschiebung l_v , die die Spannungsverteilung erfährt, wenn das freie Ende der Leitung mit C belastet wird, eingeführt. Offenbar gilt $l' = l + l_v$, wenn l' der Längenwert für freies Ende ($C = 0$) ist. Aus Gl. (4b) können wir entnehmen, daß $C = 0$ nur dann erfüllt ist, wenn T_L der Beziehung

$$T'_L = \frac{Z_H}{Z_L} \frac{1}{T_H} \quad (4c)$$

genügt. Unter Verwendung dessen folgt aus $l = l' - l'_v$

$$T_L = \frac{T'_L - T'_v}{1 + T'_v T'_L} = \frac{\frac{Z_H}{Z_L} - T'_v T_H}{T_H + T'_v \frac{Z_H}{Z_L}} \quad (4d)$$

und unter Einführung dieses in Gl. (4b) nach kurzer Zwischenrechnung

$$Z \omega C = T'_v \frac{1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T_H^2}{1 + T_H^2 + T_H T'_v \left(\frac{Z_H}{Z_L} - \frac{Z_L}{Z_H}\right)}. \quad (4e)$$

In Anlehnung an die Definition des Abschnittes 2 definieren wir jetzt die Größe l'_0 durch die Beziehung

$$Z \omega C = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} (l_v + l'_0) - \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} l'_0 \quad (4f)$$

$$Z \omega C = \frac{T'_v + T'_0}{1 - T'_v T'_0} - T'_0 = T'_v \frac{1 + T'_0^2}{1 - T'_v T'_0},$$

wobei $T_0 = \operatorname{tg} (2\pi/\lambda) l_0'$ bezeichnet wird. Die Vereinigung der Gl. (4e) und (4f) gestattet T_0' als Funktion von T_0'' zu berechnen. Es folgt so aus

$$\frac{1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T_H^2}{1 + T_H^2 + T_H T_0' \left(\frac{Z_H}{Z_L} - \frac{Z_L}{Z_H}\right)} = \frac{1 + T_0'^2}{1 - T_0' T_0''}$$

nach einigen Zwischenschritten

$$T_0' = \frac{\left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T_H + T_0' \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}\right) - T_H}{\left(\frac{Z_H}{Z_L}\right)^2 T_0' T_H - T_0' T_0'' \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}\right) + \frac{(1 + T_H^2) T_0' + T_0''}{T_H}} \quad (4g)$$

Führt man denselben Gedankengang durch, in dem aber an Stelle der Verschiebung der Spannungsverteilung gegen den Leerlauf l_0' die gegen den Fall

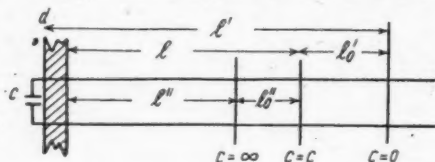


Abb. 2

des Kurzschlusses l_0'' in Gl. (4b) eingeführt wird, so liefert die ganz analog verlaufende Rechnung an Stelle von Gl. (4e) wegen $l' + l'' = l$ (s. Abb. 2)

$$Z \omega C = \frac{1}{T_0''} \frac{1 + T_H^2 + T_H T_0'' \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}\right)}{1 + \left(\frac{Z_H}{Z_L}\right)^2 T_H^2} \quad (4h)$$

Wird andererseits die Größe l_0'' durch die Beziehung

$$\frac{1}{Z \omega C} = \operatorname{tg} 2\pi \frac{l_0'' + l_0'}{\lambda} - \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} l_0'' = T_0'' \frac{1 + T_0'^2}{1 - T_0' T_0''} \quad (4i)$$

eingeführt, so folgt durch Vergleich mit Gl. (4h) die (4g) analoge Beziehung

$$T_0'' = \frac{\left(\frac{Z_H}{Z_L}\right)^2 T_H + T_0'' \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}\right) - T_H}{\left(\frac{Z_H}{Z_L}\right)^2 T_0'' T_H - T_0'' T_0' \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}\right) + \frac{(1 + T_H^2) T_0'' + T_0'}{T_H}} \quad (4k)$$

Aus den Gln. (4e), (4g), (4h) und (4k) lassen sich eine Reihe interessanter Erkenntnisse herleiten:

1. Der Quotient von (4e) und (4h) führt zu

$$\frac{T_0' T_0''}{(1 + T_H^2)^2 + (1 + T_H^2) \left(\frac{Z_H}{Z_L} - \frac{Z_L}{Z_H}\right) T_H (T_0' + T_0'') + T_H^2 \left(\frac{Z_H}{Z_L} - \frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T_0' T_0''} = \frac{1 + T_H^2 + T_H^2 \left[\left(\frac{Z_H}{Z_L}\right)^2 + \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2\right]}{1 + T_H^2 + T_H^2 \left[\left(\frac{Z_H}{Z_L}\right)^2 + \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2\right]}$$

Wäre keine Halterung vorhanden, so würde man C aus den Größen l_0' und l_0'' richtig nach den Beziehungen $Z \omega C = T_0' = 1/T_0''$ bestimmen können. Der störende

Einfluß der Halterung bewirkt, daß man die falschen Ergebnisse

$$Z \omega C' = T'_v \quad Z \omega C'' = \frac{1}{T''_v} \quad (4l)$$

erhält. Offenbar ist $C'/C'' = T'_v T''_v$. Von einer lediglich einwandfrei hergestellten Halterung läßt sich sagen, daß ihr störender Einfluß gering ist. Daher muß C'/C'' und damit auch $T'_v T''_v$ seinen Wert in der Nähe von 1 haben. Außerdem sind ε, μ und d bei einer guten Halterung so klein, daß T_H wesentlich kleiner als 1 ist⁸⁾ und der Wellenwiderstand Z_H so wenig von Z_L verschieden, daß Z_H/Z_L nahe bei 1 liegt. Unter Verwendung dieser Annahme erhält man als brauchbaren Näherungswert für das Produkt $T'_v T''_v$ den Ausdruck

$$T'_v T''_v = \frac{C'}{C''} = 1 + T_H (T'_v + T''_v) \left(\frac{Z_H}{Z_L} - \frac{Z_L}{Z_H} \right). \quad (4m)$$

Ein Beispiel soll zeigen, wie gut Gl. (4m) die exakte Formel ersetzt: $Z_L/Z_H = 1,41$ und $T_H = 1/10$ sind die Daten einer nicht besonders guten Halterung. Mit diesen Werten wird der Nenner der exakten Gleichung um 2,5% größer als 1 und der Zähler um fast den gleichen Prozentsatz größer als Gl. (4m). Damit folgt, daß Gl. (4m) auf wenigstens einige Promille genau stimmt. Gl. (4m) gestattet in einfacher Weise das Wellenwiderstandsverhältnis Z_H/Z_L zu errechnen. Nach ihr ist der störende Einfluß der Halterung um so größer, je höher der Wert von T_H und $(Z_H/Z_L - Z_L/Z_H)$ ist.

2. Bezeichnen wir

$$T(v' + v'') = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} (l'_v + l''_v),$$

so folgt aus $l'_v + l''_v = l' - l''$ (Abb. 3!)

$$T(v' + v'') = \frac{T'_L - T''_L}{1 + T'_L T''_L} = \frac{\frac{1}{T_H} \frac{Z_H}{Z_L} + T_H \frac{Z_H}{Z_L}}{1 - \left(\frac{Z_H}{Z_L} \right)^2} \quad (4n)$$

$$T(v' + v'') = \frac{1 + T_H^2}{T_H} \frac{1}{\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}}.$$

Die Beziehung (4n) stellt eine Verallgemeinerung der Gl. (3k) dar. Man erhält die letztere aus (4n), wenn man, wie dies bei der Ableitung von (3k) getan wurde, eine dünne Halterung voraussetzt und an Stelle der Längendifferenz zwischen Leerlauf und Kurzschluß den Unterschied dieser Größe gegen $\lambda/4$, oben mit $\Delta l - \Delta k$ bezeichnet, einführt. Dann kann T_H^2 neben 1 vernachlässigt werden und man erhält aus Gl. (4n)

$$\frac{1}{T(v' + v'')} = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} (\Delta l - \Delta k) = T_H \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L} \right).$$

Ersetzt man hierin weiter die Tangens-Ausdrücke durch ihre Argumente, was wegen deren Kleinheit erlaubt ist, so folgt Gl. (3k). Da $l'_v + l''_v$ der Längenunterschied zwischen Leerlauf- und Kurzschlußfall ist, stellt Gl. (4n) einen Zusammen-

⁸⁾ Die meisten Halterungen werden aus Trolitul hergestellt ($\varepsilon = 2,5$). Hierfür folgt, daß $T_H < 0,1$ gilt, wenn $d < 0,01 \lambda$ ist. Bei Leitungen für $\lambda > 50$ cm, für die vor allem Halterungen gebraucht werden, ist dies leicht zu erfüllen ($d < 5$ mm).

hang zwischen T_H , Z_H/Z_L und $l' - l''$ dar, mit dessen Hilfe aus zweien dieser Größen die dritte einfach bestimmbar ist. Sie hat vor Gl. (4m) den Vorteil, daß zwei Längenablesungen statt dreier genügen, um T_H oder Z_H/Z_L zu ermitteln.

3. Vergleicht man die Formeln (4e) und (4h) für Werte von Z_H/Z_L , die so wenig von 1 abweichen, und so kleine T_H -Werte, daß der Zähler des Bruches von Gl. (4e) praktisch übereinstimmt mit dem Nenner des Bruches der Gl. (4h), so erkennt man: Die Bestimmung der Kapazität C nach der Näherungsformel $Z \omega C = T_v'$ ist genauer als die nach der Gleichung $Z \omega C = 1/T_v''$, wenn $T_v' < T_v''$ gilt und umgekehrt. Kleine Kapazitäten werden also zweckmäßig aus der „Leerlaufformel“ $Z \omega C = T_v'$ und große Kapazitäten aus der „Kurzschlußformel“ $Z \omega C = 1/T_v''$ berechnet. Der Relativfehler bei Verwendung der einfachen Formeln (4l) ist in guter Näherung proportional T_v' bzw. T_v'' und proportional dem Produkt $T_H(Z_H/Z_L - Z_L/Z_H)$. Nach Gl. (4e) bzw. (4h) ist er bei Verwendung der zweckmäßigen Näherungsformel kleiner als

$$T_H \left[\left(\frac{Z_L}{Z_H} \right)^2 - 1 \right] + T_H \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L} \right) = T_H \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L} \right) \left(1 + T_H \frac{Z_L}{Z_H} \right),$$

wenn die Abweichungen von Zähler und Nenner der Quotienten (4e) bzw. (4h) von 1 gering sind.

4. In der Beziehung (4m) und bei Abschätzung des Relativfehlers der Gln. (4l) tritt das Produkt $T_H(Z_H/Z_L - Z_L/Z_H)$ besonders in Erscheinung. Es sei nun gezeigt, daß ihm eine unmittelbare physikalische Bedeutung zukommt. Betrachten wir wiederum den praktisch meist gegebenen Fall, daß T_H klein gegen 1 ist. Dann zeigt unter der weiteren Annahme kleinen T_v' -Wertes der Vergleich von (4e) und (4f), daß

$$T_v' = T_H \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L} \right)$$

gilt. Die exakte Forderung für die Gültigkeit dieser Beziehung ist, daß die Abweichung der Zähler von (4e) und (4f) gegen 1 klein ist gegen die Abweichungen der Nenner von 1. Dies ist der Fall, wenn außer $T_H \ll 1$ die Ungleichung

$$\left(\frac{Z_L}{Z_H} \right)^2 T_H \ll T_v' \left(\frac{Z_H}{Z_L} - \frac{Z_L}{Z_H} \right)$$

und

$$T_v' \ll T_v''$$

gilt. Weicht Z_H/Z_L nicht sehr von 1 ab, so werden beide Gleichungen erfüllt, wenn $T_H \ll T_v'$ gilt, wie man erkennt, wenn an Stelle von T_v' der Ausdruck $T_H \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L} \right)$ verwendet wird. Da in allen praktisch auftretenden Fällen T_H klein und Z_H nahe bei Z_L ist, ergibt sich als Gültigkeitsbereich das Gebiet $T_v' \gg T_H$. Läßt man die Forderung $T_H \ll 1$ fallen, so erhält man für sehr große T_v' -Werte den exakten Ausdruck

$$T_v' = \frac{T_H}{1 + T_H} \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L} \right), \quad (4o)$$

wie aus Gl. (4n) folgt, wenn dort $T(v' + v'')$ durch $1/T_v'$ ersetzt wird. — In Gl. (4o) können wegen der Kleinheit der T -Ausdrücke diese durch ihr Argument ersetzt werden und T_H^2 gegen 1 vernachlässigt werden:

$$l_0 = \sqrt{\epsilon \mu} d \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L} \right). \quad (4p)$$

Die Korrekturgröße l'_0 steht also in einem sehr einfachen Zusammenhang mit der Dicke der Halterung d und dem Wellenwidstandsverhältnis Z_L/Z_H . Als wichtigste Folgerung aus Gl. (4p) ergibt sich: Ist $l'_0 \gg \sqrt{\epsilon \mu d}$, so ist die Korrekturgröße l'_0 unabhängig von l_0 . Die am Ende von Abschnitt 2 gestellte Frage läßt sich also dahingehend beantworten, daß die mit einer bekannten, genügend großen Kapazität C bestimmte l'_0 -Größe bei allen anderen Blindwiderständen, die $l'_0 \gg \sqrt{\epsilon \mu d}$ bedingen, als Korrekturgröße verwendet werden darf. Vergleicht man die Beziehungen (3k) und (4p), so erkennt man, daß im Falle $T'_0 \gg T_H$ die Differenz $\Delta l - \Delta k$ mit l'_0 identisch wird. Dies ist verständlich, da entsprechend ihrer Definition die Differenz $\Delta l - \Delta k$ gleich dem l'_0 -Wert für den Fall des Abschlusses der Leitung mit $C = \infty$ sein muß, denn die richtige Bestimmung von C nach Gl. (2d) erfordert sowohl die Korrektur des Leerlaufes um Δl , wie auch die des Kurzschlusses (angeschlossene Kapazität ∞ !) um Δk . Da aber, wie eben gezeigt, l'_0 im Gebiet großer Kapazitäten C nicht von C abhängt, folgt: Für $l'_0 \gg \sqrt{\epsilon \mu d}$ ist die Korrekturgröße l'_0 identisch mit dem bei Übergang von Leerlauf zu Kurzschluß sich ergebenden Mangel der Spannungsverschiebung an $\lambda/4$.

5. Nachdem wir T'_0 im Gebiet $T'_0 \gg T_H$ abgeschätzt haben, sei es im Bereich $T'_0 \ll T_H$ untersucht. An dem Grenzfall $T'_0 = G$, der zu

$$T'_0 = \frac{T_H}{\sqrt{1 + T_H^2}} \sqrt{\left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 - 1} \quad (4q)$$

führt, erkennt man, daß T'_0 und T_H von gleicher Größenordnung sind. Damit folgt aus der Bedingungsgleichung $T'_0 \ll T_H$ die Beziehung $T'_0 \ll T'_0$. Verwendet man dies in Gl. (4g) und berücksichtigt man, daß $T_H \ll 1$ vorausgesetzt werden darf, so erhält man wiederum die Gl. (4q). Die Beziehung (4q) ist also nicht nur für $T'_0 = 0$, sondern im gesamten Bereich $T'_0 \ll T_H \ll 1$ gültig. Bildet man den Quotienten Q der T'_0 -Werte (4o) und (4q), so erhält man

$$Q = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{Z_H}{Z_L}\right)^2}{1 + T_H^2}}$$

Hieraus folgt, daß der T'_0 -Wert für kleine Verschiebungsgröße T'_0 stets größer als für große T'_0 -Werte ist, es sei denn, daß $Z_L = Z_H$ und $T_H = 0$ ist, d. h. daß keine Halterung vorliegt.

6. Es erhebt sich nunmehr die Frage, wie T'_0 von T'_0 in dem Bereich, der durch die Beziehungen (4o) und (4q) nicht erfaßt wird, abhängig ist. Zwecks Klärung dessen bringen wir Gl. (4g) in die Form

$$T_0'^2 \left[1 + T_H^2 - T'_0 T_H \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L} \right) \right] + T'_0 T'_0 \left[1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H} \right)^2 T_H^2 \right] - T_H^2 \left[\left(\frac{Z_L}{Z_H} \right)^2 - 1 \right] - T'_0 T_H \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L} \right) = 0 \quad (4r)$$

und machen von dem bekannten Satz Gebrauch, daß die Ableitung einer Funktion $F(x, y) = 0$ aus den partiellen Ableitungen F_x und F_y gemäß der Regel $F_x dx + F_y dy = 0$ gewonnen werden kann. So erhält man

$$\frac{dT'_0}{dT'_0} = - \frac{T'_0 \left[1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H} \right)^2 T_H^2 \right] - T_H \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L} \right) (1 + T_0'^2)}{2 T_0'^2 \left[1 + T_H^2 - T'_0 T_H \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L} \right) \right] + T'_0 \left[1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H} \right)^2 T_H^2 \right]} \quad (4s)$$

Da $T'_v < T(v' + v'')$ gilt, folgt aus Gl. (4n), daß die Ungleichung

$$T'_v T_H \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L} \right) < 1 + T_H^2$$

gültig ist und daß infolgedessen der Nenner der Beziehung (4s) stets positiv ist. Setzt man den T'_v -Wert von Gl. (4o) in den Zähler ein, so erhält man

$$\frac{T_H}{1 + T_H^2} \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L} \right) \left[1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H} \right)^2 T_H^2 - (1 + T_H^2) (1 + T_v'^2) \right].$$

Dieser Wert ist positiv, wenn $Z_L > Z_H$ gilt (was wir im folgenden voraussetzen wollen), da die Annahme eines positiven Vorzeichens der eckigen Klammer sich nach wenigen Zwischenschritten auf die immer gültige Ungleichung $\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}$

$< (1 + T_H^2) \frac{Z_L}{Z_H}$ zurückführen läßt. Für den T'_v -Wert der Gl. (4o) wird also die Ableitung dT'_v/dT'_v negativ. Das gleiche Resultat ergibt sich für den T'_v -Wert Gl. (4q), da der Zähler der Beziehung (4s) dann gleich

$$\left[1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H} \right)^2 T_H^2 \right] \frac{T_H}{1 + T_H^2} \sqrt{\left(\frac{Z_L}{Z_H} \right)^2 - 1} \left[\sqrt{1 + T_H^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{Z_H}{Z_L} \right)^2} \right]$$

wird und somit ebenfalls positiv ist. Da sowohl für kleine als auch große T'_v -Werte dT'_v/dT'_v negativ ist, erscheint ein monotoner Verlauf von T'_v in Abhängigkeit von T'_v wahrscheinlich. Wir wollen nunmehr zeigen, daß dies tatsächlich der Fall ist, indem wir beweisen, daß die Ableitung dT'_v/dT'_v nicht Null werden und somit ihr Vorzeichen nicht wechseln kann. Der Beweis läßt sich indirekt führen. Würde die Ableitung gleich Null, so müßte nach Gl. (4s)

$$T'_v \left[1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H} \right)^2 T_H^2 \right] = T_H \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L} \right) (1 + T_v'^2) \quad (4t)$$

gelten. Geht man hiermit in Gl. (4r) ein, so erhält man mit

$$T_v'^2 (1 + T_H^2) = T_H^2 \left[\left(\frac{Z_L}{Z_H} \right)^2 - 1 \right]$$

einen T'_v -Wert, der von T'_v unabhängig ist und mit dem der Gl. (4q) übereinstimmt. Dies bedeutet, daß die Ableitung dT'_v/dT'_v nur dann gleich Null wird, wenn sie bei allen T'_v -Werten verschwindet, d. h. wenn T'_v konstant bleibt. Dies wiederum ist unmöglich, wie die Berechnung des Quotienten aus den T'_v -Werten für kleine und große T'_v -Werte gezeigt hat. Damit ist bewiesen: Die Größe T'_v sinkt von ihrem Wert für $T'_v = 0$ monoton ab auf den Wert, der bei dem größtmöglichen T'_v gegeben ist. Die Wirkung einer Halterung läßt sich also um so besser durch einen konstanten T'_v -Wert beschreiben, je weniger die Werte (4o) und (4q) voneinander abweichen. Sind also die Wellenwiderstände der Leitung Z_L und der Halterung Z_H so abgeglichen, daß der Unterschied der Beziehungen (4o) und (4q) gering ist, so kann der durch die Halterung bedingte Fehler durch eine praktisch vom Abschlußwiderstand der Leitung nur wenig abhängige Kapazität verursacht gedacht werden.

5. Kapazitive und induktive Halterungen

Bei den Untersuchungen des letzten Abschnittes haben wir uns auf den Fall beschränkt, daß der Wellenwiderstand der Leitung größer als der der Halterung ist. Nur wenn dies der Fall ist, liefert die Beziehung (4q) einen reellen T'_v -Wert und nur

für diesen Fall wurde der monotone Verlauf von T'_0 bewiesen. Ist dagegen Z_L kleiner als Z_H , so wird nach der Formel (4e) $Z \omega C < T'_0$. Der Ansatz (4f) vermag dem nicht gerecht zu werden, da sich kein reelles T'_0 angeben läßt, für das $1 + T'^2_0 < 1 - T'_0 T_0$ erfüllt werden kann, wenn T'_0 so klein ist, wie es bei der Ableitung von (4g) vorausgesetzt wurde. Daraus geht hervor: Ist Z_L kleiner als Z_H , so kann zumindest bei Abschlußkondensatoren, die eine geringe Verschiebung bedingen, keine Kapazität positiven oder negativen Wertes angegeben werden, die, dem Abschlußkondensator parallelgeschaltet, die gleiche Wirkung wie die Halterung hervorruft. Wir wollen nunmehr zeigen, daß bei Halterungen, für die $Z_L < Z_H$ gilt, durch dem Abschlußwiderstand in Reihe geschaltete Selbstinduktionen ersetzt werden können. Es sei daher jetzt die in Abb. 3

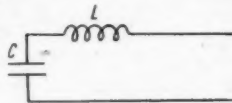


Abb. 3

Die gesamte durch L und C_L bedingte Verschiebung der Spannungsverteilung l_g wird bestimmt durch die Beziehung

$$T_g = \operatorname{tg} 2\pi \frac{l_g}{\lambda} = Z |\mathcal{G}|, \quad (5a)$$

wobei der Betrag des komplexen Leitwertes \mathcal{G} gegeben ist durch

$$\frac{1}{|\mathcal{G}|} = \frac{1}{\omega C} - \omega L. \quad (5b)$$

Die Verschiebung l_g ist identisch mit der durch Anschalten von C_r bedingten meßbaren Verschiebung l'_0 , da ohne C_r die Selbstinduktion sich in einem Spannungsbauch bzw. Stromknoten befindet und somit keinerlei Einfluß auf die Spannungsverteilung haben kann. Würde L sich nicht an einem offenen Ende befinden, sondern an Stelle von C die Leitung abschließen, so würde es eine Verschiebung l bedingen, die durch die Beziehung

$$T_L = \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda} = \frac{Z}{\omega L}$$

gegeben ist. Wegen der Identität von l_g und l'_0 folgt somit aus Gl. (5a) und (5b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{T'_0} &= \frac{1}{Z \omega C} - \frac{1}{T_L} \\ Z \omega C &= T'_0 \frac{1}{1 + \frac{T'_0}{T_L}} \end{aligned} \quad (5c)$$

Durch Vergleich mit Gl. (4e) folgt für T_L die Bedingungsgleichung

$$1 + \frac{T'_0}{T_L} = \frac{1 + T_H^2 + T_H T'_0 \left(\frac{Z_H}{Z_L} - \frac{Z_L}{Z_H} \right)}{1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H} \right)^2 T_H^2}$$

und hieraus

$$\frac{T'_0}{T_L} = T_H \frac{1 - \left(\frac{Z_L}{Z_H} \right)^2}{1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H} \right)^2 T_H^2} + T'_0 \frac{T_H \left(\frac{Z_H}{Z_L} - \frac{Z_L}{Z_H} \right)}{1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H} \right)^2 T_H^2} \quad (5d)$$

Der Relativfehler, der ohne Berücksichtigung der Halterung mit der Beziehung $Z \omega C = T'_0$ begangen wird und der nach Gl. (5c) durch T'_0/T_L gegeben ist, setzt

sich hiernach aus zwei Gliedern additiv zusammen. Das erste ist kleiner als T_H^2 und von T'_0 unabhängig, das zweite ist T'_0 proportional. Die Größe T_L selbst hat den Wert

$$T_L = \frac{1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T_H^2}{T_H \left(\frac{Z_H}{Z_L} - \frac{Z_L}{Z_H}\right) + \frac{T_H^2}{T'_0} \left[1 - \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2\right]}. \quad (5e)$$

Sie ist also ebenso wie T'_0 von T'_0 abhängig. Im Gegensatz zu T'_0 wird sie für $T'_0 = 0$ zu Null. Bei hinreichend kleinem T'_0 ist sie dieser Größe proportional:

$$T_L (T'_0 \approx 0) = T'_0 \frac{1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T_H^2}{T_H^2 \left[1 - \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2\right]}. \quad (5f)$$

Sie steigt monoton mit T'_0 an, um bei großem T'_0 sich asymptotisch dem Wert

$$T_L (T'_0 \approx \infty) = \frac{1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T_H^2}{T_H \left(\frac{Z_H}{Z_L} - \frac{Z_L}{Z_H}\right)}. \quad (5g)$$

zu nähern. Der Wert $T'_0 = \infty$ wird durch die endliche Kapazität, die der Bedingung $\omega^2 LC = 1$ genügt, hergestellt. Denn bei Vorliegen dieses Kapazitätswertes ist die L - C -Reihenschaltung in Resonanz, d. h. die Leitung wird kurzgeschlossen. Wird C größer, so wird T'_0 negativ und nimmt schließlich den in Gl. (4n) angegebenen Wert an. Hierfür wird aus Gl. (5c)

$$T_L (C = \infty) = \frac{1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T_H^2}{T_H \left(\frac{Z_H}{Z_L} - \frac{Z_L}{Z_H}\right) + T_H^2 \left[1 - \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2\right] \frac{T_H}{1 + T_H^2} \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}\right)} \quad (5h)$$

$$\frac{1}{T_L} (C = \infty) = \frac{T_H}{1 + T_H^2} \left(\frac{Z_H}{Z_L} - \frac{Z_L}{Z_H}\right).$$

Dies stimmt bis auf das Vorzeichen mit den Werten von $\frac{1}{T'_0}$ und T'_0 für große T'_0 überein.

Unter der Voraussetzung $Z_H > Z_L$ sind die Ausdrücke (5e) bis (5h) alle positiv. Wegen der monotonen Abhängigkeit der Größe T_L von T'_0 ist damit bewiesen, daß für alle T'_0 sich eine positive Selbstinduktion L angeben läßt, die in Reihe mit dem Abschluß geschaltet, die Wirkung der Halterung hervorruft. Allerdings ist die Größe T_L sehr von T'_0 abhängig [Gl. (5f!)]. Da die in Abschnitt 4 für Halterungen mit $Z_H < Z_L$ eingeführte, die Halterung ersetzende Kapazität weit weniger von T'_0 abhängt, ist die praktische Bedeutung ihrer Einführung wesentlich größer als die der Größe T_L .

Da die Wirkung von Halterungen mit $Z_H > Z_L$ durch eine Selbstinduktion und die von Halterungen mit $Z_H < Z_L$ durch eine Kapazität hervorgerufen werden kann, erscheint es sinnvoll, Halterungen der ersten Art als induktive und solche der zweiten Art als kapazitive Halterungen zu bezeichnen. Die Ergebnisse der Abschnitte 4 und 5 lassen sich daher wie folgt zusammenfassen: Die Wirkung einer kapazitiven Halterung kann durch eine dem Abschluß parallel geschaltete

Kapazität ebenfalls hervorgerufen werden. Die Größe dieser Kapazität ist um so geringfügiger vom Abschluß abhängig, je dünner die Halterung und je besser ihr Abgleich ist. Die Wirkung einer induktiven Halterung dagegen kann durch eine dem Abschluß in Reihe geschaltete Selbstinduktion verursacht werden, deren Wert in starkem Maße vom Abschluß abhängig ist.

Aus Gl. (5d) folgt ebenso wie aus Gl. (4e), daß besonders bei großen T'_0 -Werten, also bei großen Abschlußleitwerten, die Halterung eine starke Korrektur der ohne Halterung gültigen Formel $Z \omega C = T'_0$ erforderlich macht. Das im Abschnitt 2 unter Voraussetzung einer ideal kapazitiven Halterung gewonnene Ergebnis erfährt demnach seine Erweiterung auf alle Arten von Halterungen. Dies gilt für beliebige rein imaginäre Abschlußwiderstände. Wir haben zwar immer den Fall einer angeschlossenen Kapazität C betrachtet, jedoch wurde an keiner Stelle vorausgesetzt, daß C positiv ist. Die Theorie umfaßt also auch negative C -Werte oder, was dasselbe ist, am Ende der Leitung angeschlossene Induktivitätswerte.

Abschließend sei die Frage beantwortet, in welchem T'_0 -Bereich der Fehler der Beziehung $Z \omega C = T'_0$ praktisch gleich Null ist. Betrachten wir die für kapazitive Halterungen gültige Gl. (4f), so sieht man, daß dies für $T'_0 = -T'_0$ der Fall ist. Das bedeutet, daß Abschlußwiderstände, die ungefähr die gleiche Verschiebung mit umgekehrten Vorzeichen bedingen, wie sie durch die Halterung allein hervorgerufen wird, einwandfrei nach der Formel $Z \omega C = T'_0$ bestimmt werden. Der Abschlußwiderstand hat also sozusagen die durch die Halterung bedingte Verschiebung rückgängig zu machen bzw. er muß mit der Halterung zusammen die Leitung mit einem unendlich großen Abschlußwiderstand abschließen. Bei einer kapazitiven Halterung muß der Abschluß somit durch eine Selbstinduktion gebildet werden. Wie hängt nun $T'_0 = -T'_0$ von Z_L, Z_H und T_H ab? Die Beantwortung dieser Frage ist mit Hilfe von Gl. (4e) möglich. Aus dieser folgt mit $Z \omega C = T'_0$

$$\left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T_H^2 = T_H^2 + T_H T'_0 \left(\frac{Z_H}{Z_L} - \frac{Z_L}{Z_H}\right) \quad (5i)$$

$$T'_0 = -\frac{Z_L}{Z_H} T_H.$$

Bei einer induktiven Halterung folgt aus den Gl. (5c) und (5f), daß für sehr kleine T'_0 die Formel $Z \omega C = T'_0$ praktisch richtig ist. Außerdem verschwindet die Korrekturgröße T'_0/T_L nach Gl. (5d), wenn die Beziehung (5i) gilt. Dies ist selbstverständlich, da die Ableitung von (5i) nichts über den kapazitiven oder induktiven Charakter der Halterung voraussetzt und drückt den trivialen Fall aus, daß $T_L = \infty$ bzw. $L = 0$ wird, wie aus Gl. (5e) folgt.

Fassen wir das Hauptergebnis dieses Absatzes nochmals kurz zusammen: Kapazitive Halterungen ($Z_L > Z_H$) gestatten die durch sie verursachte Störung durch einen Kapazitätswert darzustellen, der dem Abschlußwiderstand parallel geschaltet ist und im allgemeinen nur gering vom Abschluß der Leitung abhängt. Induktive Halterungen dagegen ($Z_L < Z_H$) gestatten nicht die Einführung praktisch wenig variabler Korrekturgrößen. Hieraus folgt die wichtige Vorschrift: Ist es nicht möglich, eine Halterung ideal zu gestalten ($Z_H = Z_L$), so soll man die Konstruktion der Halterung so ausführen, daß die Halterung kapazitiv wirkt.

6. Die Wirkung einer ideal kapazitiven Halterung auf die Komponenten eines beliebig komplexen Abschlußwiderstandes

In den vorangegangenen Abschnitten dieser Arbeit wurde ein rein imaginärer Abschluß der Leitung vorausgesetzt. Für nicht rein imaginären Abschluß erfährt die gebrachte Theorie eine wesentliche Komplizierung. Ist indessen die Halterung „ideal kapazitiv“, d. h. läßt sie sich durch eine Kapazität C_0 ersetzen, die unabhängig vom Abschlußwiderstand ist, so ergeben sich übersichtliche Beziehungen. Dieselben sollen nunmehr entwickelt werden. Der Abschluß bestehe aus der Parallelschaltung einer Kapazität C mit einem Widerstand $R = 1/G$. Der mit der Halterung zusammen gegebene Endwiderstand der Leitung hat somit die Leitfähigkeit

$$\mathcal{G} = G + j\omega(C + C_0). \quad (6a)$$

Wie in einer demnächst folgenden Arbeit gezeigt werden soll, besteht zwischen dem Wellenverhältnis W der Spannungsverteilung und der Verschiebung der Verteilung $l + l_0$ gegenüber dem unbelasteten Fall einerseits und \mathcal{G} andererseits der folgende Zusammenhang:

$$Z\mathcal{G} = \operatorname{Tg} \frac{x + j\varphi}{2},$$

wobei $x/2 = \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} W$ und $\varphi = 4\pi(l + l_0)/\lambda$ gilt und Z der Wellenwiderstand der Leitung ist. Somit folgt

$$Z\mathcal{G} = j \operatorname{tg} 2\pi \frac{l + l_0}{\lambda} - j \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} W. \quad (6b)$$

Dabei ist l die bei Anbringung des Abschlusses hervorgerufene Verschiebungsgröße und l_0 die durch die Halterung bedingte. Für letztere gilt natürlich

$$Z\omega C_0 = \operatorname{tg} 2\pi \frac{l_0}{\lambda}.$$

Verwendet man dies sowie Gl. (6a), so folgt nach Auftrennung in die Komponenten der komplexen Gl. (6b) nach kurzer Rechnung:

$$ZG = W \frac{1 + \operatorname{tg}^2 2\pi \frac{l + l_0}{\lambda}}{1 + W^2 \operatorname{tg}^2 2\pi \frac{l + l_0}{\lambda}}. \quad (6c)$$

$$Z\omega C = \operatorname{tg} 2\pi \frac{l + l_0}{\lambda} \frac{1 - W^2}{1 + W^2 \operatorname{tg}^2 2\pi \frac{l + l_0}{\lambda}} - \operatorname{tg}^2 2\pi \frac{l_0}{\lambda}. \quad (6d)$$

Vergleicht man diese Beziehung mit den ohne Halterung gültigen, die man erhält, wenn $l_0 = 0$ gesetzt wird, so erkennt man: Die Größen G und $C + C_0$ werden nach den bekannten Formeln, die die Halterung nicht berücksichtigen, richtig bestimmt, wenn l durch $l + l_0$ ersetzt wird.

Es sei nunmehr der durch das Auftreten von l_0 bedingte Fehler der Gleichungen, die ohne Halterung gültig sind, diskutiert. Die letzteren Gleichungen lauten offenbar

$$ZG_f = W \frac{1 + \operatorname{tg}^2 2\pi \frac{l}{\lambda}}{1 + W^2 \operatorname{tg}^2 2\pi \frac{l}{\lambda}} \quad (6e)$$

$$Z\omega C_f = \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda} \frac{1 - W^2}{1 + W^2 \operatorname{tg}^2 2\pi \frac{l}{\lambda}}. \quad (6f)$$

Wir wenden uns zunächst dem Ausdruck (6c) zu. Die Anwendung des Additionstheorems der tg-Funktion führt nach einigen Zwischenschritten mit den Abkürzungen $T_1 = \operatorname{tg} 2\pi l/\lambda$ und $T_0 = \operatorname{tg} 2\pi l_0/\lambda$ zu

$$ZG = W \frac{1 + T_1^2}{1 + W^2 T_1^2} \frac{1 + T_0^2}{1 + W^2 T_1^2 + \frac{T_0^2(T_1^2 + W^2) - 2T_1 T_0(1 - W^2)}{1 + W^2 T_1^2}} \quad (6g)$$

Setzt man die bei einer leidlich guten Halterung immer erfüllte Ungleichung

$$l_0 < 1,6 \frac{\lambda}{100} \rightarrow T_0 < 0,1 \quad (6h)$$

voraus, so folgt, wie der Vergleich von (6e) und (6g) zeigt, mit mindestens 1% Genauigkeit, daß der Relativfehler der nach (6e) bestimmten G -Größe durch

$$\frac{\Delta G}{G} = T_0 \frac{T_0(T_1^2 + W^2) - 2T_1(1 - W^2)}{1 + W^2 T_1^2} \quad (6i)$$

gegeben ist. Dieser Ausdruck ist monoton von W abhängig, denn seine Ableitung nach W^2 ist entweder immer oder nie gleich Null. Infolgedessen ist es auch der Quotient, um den sich die Beziehungen (6e) und (6g) unterscheiden. Die extremen Werte dieses Quotienten ergeben sich für $W = 0$ und $W = 1$ mit $(1 + T_0^2)/(1 - T_1 T_0)^2$ und 1. Wegen der Kleinheit von T_0 ist der erste Ausdruck praktisch identisch mit $1 + 2T_1 T_0$. Somit folgt: Wird die Halterung nicht berücksichtigt, so erhält man zu kleine Leitwerte. Der Fehler wird um so größer, je kleiner W ist, d. h. er ist vor allem bei geringen Leitwerten zu berücksichtigen. Sein Relativwert ist in guter Näherung maximal gleich $2T_1 T_0$.

Die Diskussion des Einflusses der Halterung auf die Bestimmung von C führt zu folgenden Ergebnissen: Aus Gl. (6d) werde der Ausdruck (6f) herausgezogen. Es folgt

$$Z\omega C = \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda} \frac{1 - W^2}{1 + W^2 \operatorname{tg}^2 2\pi \frac{l}{\lambda}} \quad (6c)$$

$$\left[\frac{1 + W^2 T_1^2}{T_1} \frac{\operatorname{tg} 2\pi \frac{l+l_0}{\lambda}}{1 + W^2 \operatorname{tg}^2 2\pi \frac{l+l_0}{\lambda}} \frac{T_0}{T_1} \frac{1 + W^2 T_1^2}{1 - W^2} \right] \quad (6k)$$

$$\frac{C}{C_f} = \frac{T_1 + T_0}{T_1(1 - T_1 T_0)} \frac{1 + W^2 T_1^2}{1 + W^2 \left(\frac{T_1 + T_0}{1 - T_1 T_0} \right)^2} - \frac{T_0}{T_1} \frac{1 + W^2 T_1^2}{1 - W^2}$$

Mit zunehmendem W nimmt der Quotient C/C_f monoton ab. Für $W = 0$ hat er den uns bereits bekannten Wert

$$\frac{C}{C_f}(W = 0) = \frac{T_1 + T_0}{T_1(1 - T_1 T_0)} - \frac{T_0}{T_1} = \frac{1 + T_0^2}{1 - T_1 T_0}, \quad (6l)$$

ist also größer als 1 und hat bei nicht zu großem Produkt T_0 in erster Näherung den Wert $1 + T_1 T_0$. Der Vergleich dieses Ausdruckes mit dem für G gültigen zeigt uns, daß der Relativfehler von C_f etwa doppelt so groß ist wie der von C , wenn W klein

ist. Wird W größer, so sinkt C/C_f monoton auf den Wert Null und wird dann negativ. Der Wert Null wird erreicht, wenn

$$W^2 = \frac{\operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda}}{\operatorname{tg} 2\pi \frac{l+l_0}{\lambda}} \quad (6m)$$

gilt, wie man sich durch Einsetzen in Gl. (6d) leicht überzeugen kann. Da der Unterschied von $\operatorname{tg} 2\pi l/\lambda$ und $\operatorname{tg} 2\pi (l+l_0)/\lambda$ wegen der Kleinheit von l_0 bei nicht zu großen Werten von l gering ist, muß der W -Wert (6m) nahe bei 1 liegen. Es ergibt sich somit folgendes Resultat: Bei sehr kleinen W -Werten ist der Relativfehler für C , der ohne Berücksichtigung der Halterung begangen wird, etwa gleich $T_0 T_l$. Mit anwachsendem W wird er kleiner, bis $C = C_f$ wird. Sodann wird C kleiner als C_f , um bei dem in der Nähe von 1 gelegenen W -Wert (6m) gleich Null zu werden. Während also bei kleineren W -Werten*) der Fehler von C_f kleiner als für $W = 0$ ist, nimmt er für größere W beträchtliches Ausmaß an. Für größeres W ist also der Einfluß der Halterung auf C wesentlich stärker als auf G . Seine Erfassung durch Anwendung der Beziehung (6d) ist unbedingt erforderlich.

*) Unter kleineren W -Werten sind solche verstanden, die kleiner als der durch Gl. (6m) gegebene Wert sind.

Frankfurt/M., Kaiser-Wilhelm-Institut für Biophysik.

(Bei der Redaktion eingegangen am 9. Juni 1949.)

Die Bestimmungen der dielektrischen und magnetischen Eigenschaften inhomogener Dielektriken, insbesondere biologischer Körper, im Dezimeterwellenbereich¹⁾. III

Auswerteverfahren zur Bestimmung der elektrischen und magnetischen Stoffkonstanten im Dezimeterwellengebiet

Von Hermann Schwan

(Mit 1 Abbildung)

Inhaltsübersicht

In der vorliegenden Arbeit wird die Frage erörtert, wie man im Dezimeterwellenbereich die vier elektrischen und magnetischen Konstanten ϵ , μ , $\operatorname{tg} \theta_\epsilon$ und $\operatorname{tg} \theta_\mu$ von Materialien zweckmäßig bestimmt. Dabei wird angenommen, daß die Materialprobe das Ende einer Lecherleitung ohne Änderung der Leitungsdimensionen ausfüllt bzw. umgibt und die bekannte Methode der Spannungsabtastung zwischen Sender und Probe voraussetzt. Mit dieser Methode wird das Wellenverhältnis $U(\min):U(\max)$ und die Lage der Spannungsminima gemessen, wobei die Probe an dem der Leitung abgewandten Ende einmal kurzgeschlossen ist und im zweiten Meßgang offen bleibt. Die bisher bekannten rechnerischen Verfahren zur Bestimmung der genannten Materialkonstanten aus den Meßwerten sind recht umständlich. So benötigt das in der vorliegenden Arbeit zunächst gebrachte Verfahren, das nur geringe Verbesserungen gegenüber den von anderen Autoren mitgeteilten Methoden besitzt, 58 Rechenoperationen (Gln. 8c, 8d, 10b, 10c, 13a, 13b, 13e und 13f). Nur ein kleiner Teil dieser Arbeit kann durch graphische Darstellung erleichtert werden. Bei Serienuntersuchungen macht sich der durch diese Auswertung bedingte Zeitaufwand sehr störend bemerkbar. So ergibt sich die Frage nach zweckmäßigeren Auswerteverfahren, die das Endergebnis schneller ermitteln lassen. In der vorliegenden Arbeit werden solche Verfahren angegeben.

Ist man im Besitz komplexer Tangenstafeln, so arbeitet man zweckmäßig mit dem Verfahren, das in den Gl. (20a) und (20b) seinen Ausdruck findet und das bei gleicher Allgemeingültigkeit eine wesentliche Verbesserung gegenüber dem erstgebrachten Verfahren aufweist. Der Zeitaufwand bei Anwendung dieses „komplexen“ Verfahrens beträgt etwa ein Drittel desjenigen, den das erstgenannte Verfahren erfordert.

Man kann sich die Rechenarbeit sehr erleichtern, wenn man spezielle Gegebenheiten der Materialproben berücksichtigt. Es ist dann möglich, gegenüber dem genannten komplexen Verfahren weitere für die praktische Arbeit bedeutende Vereinfachungen einzuführen. Es sind daher im weiteren Verlauf der Arbeit eine Reihe von Sonderverfahren entwickelt worden, die in sehr vielen Fällen besonderer

¹⁾ Auszug aus der Frankfurter Habilitationsschrift 1946 ²⁾.

²⁾ H. Schwan, Fiat Report Nr. 1099 Kap. V.

Probeneigenschaften von praktisch großem Nutzen sind. Diese Methoden betreffen die folgenden Möglichkeiten:

1. Die Materialien sind nicht eisenhaltig. Es ist $\mu = 1$ und $\operatorname{tg} \vartheta_\mu = 0$. Ist dies der Fall, so wird die Durchführung der Kurzschlußmessung schwer durchführbar, wie den Gl. (22) und (22a) entnommen werden kann und auch unnötig. ε und $\operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon$ sind dann nach der bekannten Beziehung (21) exakt bestimmbar, wobei man allerdings im Besitz der komplexen Funktion $z = w \operatorname{tg} w$ sein muß. Ohne diese Funktion ergeben sich in vollkommen ausreichender Näherung die gesuchten Werte schnell mit Hilfe der Beziehungen (25a) und (25b), wenn die Forderung (23d) erfüllt wird, was praktisch meist der Fall ist.

2. Die Proben sind dünn. Man verwendet zweckmäßig die reellen Beziehungen (30a) und (30b), wobei meist die darin enthaltenen Korrekturen der einfachen Beziehungen (31a) und (31b) nur überschlagen werden müssen. Wenn die Korrekturen in den Gl. (30) so groß werden, daß ihre genaue Berechnung erforderlich wird, dann rechnet man einfacher mit Hilfe der Beziehungen (23) komplex. Der Gültigkeitsbereich der Beziehungen (30) ist mit Hilfe der Beziehungen (28a) und (28b) abschätzbar, den Relativfehler liefern die Beziehungen (28).

3. Die Proben sind sehr dünn und vorwiegend ohmisch leitend. Dieser Fall ist z. B. gegeben, wenn leitfähige Papiere untersucht werden sollen. Es ergeben sich hier besonders einfache Beziehungen für Leitfähigkeit und Verlustfaktor, wenn die Verschiebung der Spannungsverteilung, die das Papier verursacht, klein ist.

4. Die Materialien verursachen keine Dämpfung, d. h. es ist $\operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon = \operatorname{tg} \vartheta_\mu = 0$. Es werden die hierfür exakten Formeln und im Gebrauch sehr einfachen Näherungsformeln angegeben. Die Näherungsgleichungen (45) gestatten die Bestimmung von ε und μ mit ausreichender Genauigkeit, wenn die Forderung (44) erfüllt wird.

5. Sodann werden Formeln angegeben, die eine Erweiterung der Gl. (45) für beliebig leitfähige Proben darstellen und ihre Fehler abgeschätzt. Sie sind besonders geeignet zur Bestimmung der *DK* schlecht leitender Proben und zur Ermittlung der Leitfähigkeit gut leitender Materialien.

Abschließend folgt eine ausführliche Formelzusammenstellung für den praktischen Gebrauch.

1. Allgemeines

Die Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten (*DK*) und Leitfähigkeit von biologischen Material bei ultrahohen Frequenzen ist zur Klärung des hier vorliegenden Mechanismus der Stromleitung unerlässlich. Bekanntlich ebenso wichtig ist die Ermittlung der beiden elektrischen Konstanten von Elektrolyten zur Prüfung der von Debye entwickelten Vorstellungen. Es seien daher im folgenden die vom Verfasser als besonders zweckmäßig erkannten Verfahren zusammengestellt, mit deren Hilfe Reihenuntersuchungen durchgeführt werden können. In Anbetracht der Tatsache, daß für viele Fragestellungen auch die eventuell von eins abweichende Permeabilität sowie der magnetische Verlust interessiert, soll zunächst die Frage behandelt werden, wie sich sowohl elektrische als auch magnetische Stoffkonstanten bestimmen lassen. Es wird dann gezeigt, wie sich die Methoden vereinfachen lassen, wenn nur die dielektrischen Qualitäten interessieren oder

sonstige Voraussetzungen wie geringe Probendicke, geringe Verluste usw. erfüllt sind.

Die Definition der $DK \epsilon$ ist bekannt als Quotient der Kapazitäten eines mit dem betreffenden Material ausgefüllten Kondensators und des gleichen Kondensators mit dem Dielektrikum Luft. In gleicher Weise ist auch die Permeabilität μ als Quotient zweier Induktivitäten definiert. Die elektrischen Verluste können dargestellt werden durch einen dem Kondensator parallelgeschalteten Ohmschen Leitwert G . Sie sind auf verschiedenste Ursachen zurückführbar (polare Molekeln, inhomogene Struktur, Ionen). Entsprechend kann man die magnetischen Energieverluste symbolisch darstellen durch einen mit einer Spule der Induktivität μL in Serie geschalteten Ohmschen Widerstand R . Die magnetischen Verluste werden bekanntlich hervorgerufen u. a. durch Wirbelströme und Hysteresis. Zur Charakterisierung der Verluste wird der Verlustfaktor benutzt. Er ist definiert als das Verhältnis der Wirkleistung zur Blindleistung. Elektrischer und magnetischer Verlustfaktor sind daher gegeben durch die Beziehungen

$$\operatorname{tg} \theta_{\epsilon} = \frac{G}{\omega C_{\epsilon}} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \theta_{\mu} = \frac{R}{\omega L_{\mu}},$$

wenn ω die Kreisfrequenz ist.

Neben ϵ , μ und den Verlustfaktoren erweist es sich als zweckmäßig, die komplexen DK - und Permeabilitätswerte ϵ^+ und μ^+ einzuführen. Die komplexe DK erhalten wir durch ein Verfahren, das der bekannten Einführung komplexer Leitfähigkeiten entspricht. Wir definieren sie durch die Beziehung

$$\epsilon^+ = \epsilon (1 - j \operatorname{tg} \theta_{\epsilon}).$$

Entsprechend erweist es sich als zweckmäßig, die komplexe Permeabilität μ^+ durch

$$\mu^+ = \mu (1 - j \operatorname{tg} \theta_{\mu})$$

einzuführen.

Wir benutzen somit in der Arbeit die folgenden Bezeichnungen:

$R, G, \mu, L, \epsilon, C$	Widerstand, Ableitung, Selbstinduktion und Kapazität pro Längeneinheit der Probe
d	Probendicke
α	Winkelmaß der Probe
β	Dämpfungsmaß der Probe
$\gamma = \beta + j\alpha$	Fortpflanzungsmaß
$\operatorname{tg} \theta_{\epsilon} = \frac{G}{\omega \epsilon C}$	dielektrischer Verlustfaktor
$\operatorname{tg} \theta_{\mu} = \frac{R}{\omega \mu L}$	magnetischer Verlustfaktor
$\epsilon^+ = \epsilon (1 - j \operatorname{tg} \theta_{\epsilon})$	komplexe DK
$\mu^+ = \mu (1 - j \operatorname{tg} \theta_{\mu})$	komplexe Permeabilität
$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$	Wellenwiderstand der Meßleitung
$3 = \sqrt{\frac{R + j \omega \mu L}{G + j \omega \epsilon C}}$	Wellenwiderstand in der Probe

\Re_L bzw. \Re_K

komplexer Eingangswiderstand der Probe im Leerlauf- bzw. Kurzschlußfall

 $P = \rho e^{-j\varphi}$

Reflexionsfaktor, der durch den Probeneingangswiderstand bestimmt wird

 $W = \frac{U_{\min}}{U_{\max}}$

Wellenverhältnis (bei Abtastverfahren definiert!)

 B die Knotenbreite ist gleich dem Abstand der zu beiden Seiten des Spannungsminimums gelegenen Stellen, an denen die Spannung um den Faktor $\sqrt{2}$ größer als im Minimum ist (bei Abtastverfahren definiert) l bzw. k

Verschiebung, die die Spannungsverteilung bei offener bzw. kurzgeschlossener Leitung erfährt, wenn die Leitung mit der Probe belastet wird (bei Abtastverfahren definiert).

Wellenverhältnis, Knotenbreite und Betrag des Reflexionskoeffizienten ρ sind voneinander abhängige Größen: Infolge der Reflexion an der Materialprobe und der dadurch bedingten rücklaufenden Welle kommt es zu einer stehenden Wellenverteilung. In den Maximis dieser Verteilung wird die hinlaufende Welle offenbar phasenrichtig um ihren ρ -fachen Wert vermehrt, in den Minimis vermindert. Infolgedessen gilt

$$W = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \text{ bzw. } \rho = \frac{1 - W}{1 + W} \quad (1)$$

Ebenso bekannt wie dieser Zusammenhang ist das Gesetz der Spannungsverteilung längs der Leitung^{a)}

$$U^2 = U_0^2 \left[1 + \rho^2 + 2\rho \cos \left(4\pi \frac{x}{\lambda} + \varphi \right) \right], \quad (2)$$

aus der sich der Zusammenhang zwischen W und B

$$\frac{1}{W^2} = 1 + \frac{1}{\sin^2 \pi \frac{B}{\lambda}} \quad (3)$$

leicht herleiten läßt. Die analog wie die Knotenbreite im Maximum definierbare „Bauchbreite“ hat den Vorteil, als Maximumgröße weniger störanfällig zu sein, aber den wesentlichen Nachteil, wegen des flachen Spannungsverlaufs in der Nachbarschaft des Maximums nicht genau meßbar zu sein. Sie wird daher nicht benutzt. Weiterhin ist der Zusammenhang zwischen l bzw. k und φ bekannt:

Es ist

$$\varphi_L = 4\pi \frac{l + d}{\lambda}, \quad \varphi_K = 4\pi \frac{k + d}{\lambda} - \pi. \quad (4)$$

Der Index L bzw. K deutet darauf hin, ob die Probe an dem der Meßleitung abgewandten Ende offen oder kurzgeschlossen ist. Auch Gl. (4) ist evident: Durch die Probe wird ein Teil der Spannungsverteilung aufgeschluckt. Dieser Teil der Spannungsverteilung könnte ebenso gut durch eine Fortsetzung der Leitung um $l + d$ über den Probenanfang hinaus (bzw. um l vom Probenende aus) aufgenommen werden, ohne daß sich die „Phasenverteilung“ längs der Meßleitung ändert. Da aber einer Längenänderung λ die Phasenänderung 2π entspricht, muß der Länge

^{a)} B. K. S. Knol u. M. I. O. Strutt, Physica IX, Juni 1942, S. 577.

$l + d$ die Phase $2\pi(l + d)/\lambda$ gleichwertig sein. Da ferner die Welle auf ihrem Hin- und Rückweg die Gesamtlänge $2(l + d)$ durchlaufen muß, wenn die Probe durch ein Leitungsstück ersetzt wird, ergibt sich für die gesamte Phasendrehung der doppelte Wert der Gl. (4). Bei der Berechnung der „Kurzschlußphase“ φ_K gilt gleiches. Nur muß noch berücksichtigt werden, daß die äquivalente Leitungslänge $k + d$ an ihrem Ende entsprechend der Definition von k kurzgeschlossen zu denken ist, die Spannung am Ende also einen zusätzlichen Phasensprung um π erfährt.

Die im Folgenden gebrachten Auswerteverfahren haben Gültigkeit für Lecherleitungen in offener und geschlossener Bauweise. Sie gelten für das meist gebräuchliche „Abtastverfahren“, bei dem die Spannungsverteilung längs einer Lecherleitung mit Hilfe einer verschiebbaren Sonde untersucht wird, und auch für das Resonanzverfahren, bei dem die Meßleitung auf Resonanz abgestimmt und die Resonanzkurve ausgemessen wird. Bei Verwendung von Resonanzverfahren ist in den folgenden Formeln das Wellenverhältnis W durch eine andere Größe zu ersetzen. Ein vom Verfasser entwickeltes Verfahren⁴⁾ ⁵⁾, das besonders übersichtlich ist, fordert einfach den Ersatz der Knotenbreite B durch die Resonanzkurvenbreite $2\Delta l$, die in 0,7facher Höhe des Maximalwertes der Resonanzkurve bestimmt wird. Es gilt somit für das gesamte Verfahren ohne Einschränkung:

$$B = 2\Delta l; \quad \frac{1}{W^2} = 1 + \frac{1}{\sin^2 2\pi \frac{\Delta l}{\lambda}}. \quad (5)$$

Die Phasenbetrachtung gilt in gleicher Weise für das Resonanzverfahren. Bei diesem wird die Verschiebung bestimmt, die mit der Kurzschlußbrücke am der Probe abgewandten Leitungsende vorgenommen werden muß, um die Leitung bei Belastung mit der Probe wieder auf Resonanz abzustimmen. Es ist physikalisch einleuchtend und auch mathematisch ableitbar, daß diese Verschiebung übereinstimmen muß mit der durch die Probe bedingten Verschiebung der Spannungsverteilung längs der Leitung. Auch hierauf soll näher im Bericht über das Resonanzverfahren eingegangen werden. Zusammenfassend gilt: Alle im Folgenden für das Abtastverfahren angegebenen Formeln gelten auch für das Resonanzverfahren, wenn das Wellenverhältnis mit Hilfe von Gl. (5) durch die Resonanzkurvenbreite ersetzt wird. Vorausgesetzt wird, daß die zu untersuchende Probe am Ende der Leitung sitzt und die Leitungsdimensionen in der Probe unverändert bleiben. Biologisches Material oder Flüssigkeiten werden hierbei von „Wänden“ eingefafßt, die nicht reflektieren. Wie solche Wände beschaffen sein müssen, ist in einer früheren Arbeit^{5a)} dargelegt.

2. Allgemeines Auswerteverfahren ohne Verwendung komplexer tg-Tafeln

Die Berechnung der Materialkonstanten vollzieht sich in zwei Schritten: Zunächst wird aus den Werten der Spannungsverteilung der Eingangswiderstand der Probe im Leerlauf- und Kurzschlußfall ermittelt. Die Leitung selbst weiß dabei nicht, wie diese Eingangswiderstände zustande kommen, ob durch einen punktförmigen komplexen Abschluß oder durch die Probe. Dann wird aus den Eingangswiderständen auf die Materialkonstanten mit Hilfe der Kenntnis der Probendicke d geschlossen.

⁴⁾ H. Schwan, Fiat Report Nr. 1099, Kap. II.

⁵⁾ H. Schwan, Ann. Physik (6) 5, 253 (1950).

^{5a)} H. Schwan, Ann. Physik (6) 5, 268 (1950).

a) Zusammenhang zwischen Eingangswiderstand und Spannungsverteilung

Bekanntlich gilt für den Eingangswiderstand die Beziehung^{a)}

$$\Re = \frac{1+P}{1-P} Z = Z \frac{1+\varrho e^{-j\varphi}}{1-\varrho e^{-j\varphi}}. \quad (6)$$

Hieraus folgt nach kurzer Zwischenrechnung, bei der der Nenner reell gemacht wird:

$$\frac{\Re}{Z} = \frac{1-\varrho^2-j \cdot 2\varrho \sin \varphi}{1+\varrho^2-2\varrho \cos \varphi}. \quad (7)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung und der Beziehungen (1) und (4) lassen sich Real- und Imaginärteil von \Re_L und \Re_K bestimmen (Näheres siehe unten). Aus diesen wiederum folgen bei hinreichend kleiner Probendicke die Materialkonstanten der Probe in einfacher Weise. Sie sind Real- und Imaginärteil von \Re_L und \Re_K bzw. deren reziproken Werten proportional. Was dabei unter „hinreichend“ zu verstehen ist, wird unten eingehend erörtert werden. Liegt ein punktförmig konzentrierter Abschlußwiderstand vor, so sind dessen Komponenten mit denen von \Re_L natürlich identisch.

Für die weitere allgemeine Auswertung ist es zweckmäßig, Betrag r und Phase ϑ von \Re/Z anzugeben. Es folgt aus Gl. (7) leicht

$$r^2 = \frac{1+\varrho^2+2\varrho \cdot \cos \varphi}{1+\varrho^2-2\varrho \cdot \cos \varphi} \quad (8a)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = -\frac{2\varrho}{1-\varrho^2} \sin \varphi. \quad (8b)$$

Wird an Stelle von ϱ das Wellenverhältnis W nach Gl. (1) eingeführt, so folgt nach wenigen Zwischenschritten

$$r^2 = \frac{1+W^2+(1-W^2) \cos \varphi}{1+W^2-(1-W^2) \cos \varphi} \quad (8c)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = -\frac{1-W^2}{2W} \sin \varphi. \quad (8d)$$

b) Berechnung der Materialkonstanten aus \Re_L und \Re_K

Aus der Vierpoltheorie der Leitung ist bekannt (Tg hyperbolischer Tangens!)

$$\beta = \sqrt{\Re_L \cdot \Re_K} \quad (9)$$

$$\operatorname{Tg} \gamma d = \sqrt{\frac{\Re_K}{\Re_L}}. \quad (10)$$

Aus Gl. (9) folgt wegen $\Re/Z = r \cdot e^{j\vartheta}$

$$\frac{\beta}{Z} = \sqrt{r_L r_K} \cdot e^{\frac{j}{2}(\vartheta_L + \vartheta_K)} \quad (9a)$$

und aus Gl. (10)

$$\operatorname{Tg} (\beta + j\alpha) = \sqrt{\frac{r_K}{r_L}} \cdot e^{\frac{j}{2}(\vartheta_K - \vartheta_L)} \quad (10a)$$

α und β lassen sich hieraus bestimmen, wenn auf den Tg-Ausdruck das Additionstheorem der Tg-Funktion angewandt wird. Dann folgt unter Fortlassung einiger

^{a)} B. Vilbig, Lehrbuch der H.F.-Technik. 2. Auflage, Leipzig 1939.

Zwischenrechnungen, wie von anderer Seite bewiesen,

$$\operatorname{Tg} 2\beta d = \frac{2\sqrt{\frac{r_K}{r_L}}}{1 + \frac{r_K}{r_L}} \cdot \cos \frac{\vartheta_K - \vartheta_L}{2} \quad (10b)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha d = \frac{2\sqrt{\frac{r_K}{r_L}}}{1 - \frac{r_K}{r_L}} \cdot \sin \frac{\vartheta_K - \vartheta_L}{2} \quad (10c)$$

Mit Hilfe der Beziehungen (9a) bis (10c) lassen sich \mathfrak{Z}/Z und γ ohne Verwendung komplexer Tafeln berechnen.

Weiter gilt bekanntlich für γ

$$\gamma^2 = (R + j\omega\mu L)(G + j\omega\varepsilon C). \quad (11)$$

Wegen der Definition von ε^+ und μ^+ und wegen $1/\sqrt{LC} = c$ ist dies identisch mit

$$\gamma = j\frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\varepsilon^+ \mu^+}. \quad (11a)$$

Andererseits folgt aus der Definition von \mathfrak{Z}

$$\frac{\mathfrak{Z}}{Z} = \sqrt{\frac{\mu^+}{\varepsilon^+}}. \quad (11b)$$

Multiplikation und Division der Gl. (11a) und (11b) ergeben

$$\gamma \frac{\mathfrak{Z}}{Z} = j\frac{2\pi}{\lambda} \mu^+ \quad (12a)$$

$$\gamma \frac{\mathfrak{Z}}{Z} = j\frac{2\pi}{\lambda} \varepsilon^+. \quad (12b)$$

Die Auftrennung dieser beiden Beziehungen in die reellen und imaginären Komponenten unter Verwendung von (9a) liefert das Endresultat in der Form:

$$\mu = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{r_L r_K} \left[\alpha \cos \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2} + \beta \sin \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2} \right] \quad (13a)$$

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r_L r_K}} \left[\alpha \cos \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2} - \beta \sin \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2} \right] \quad (13b)$$

$$\mu \operatorname{tg} \vartheta_\mu = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{r_L r_K} \left[\beta \cos \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2} - \alpha \sin \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2} \right] \quad (13c)$$

$$\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r_L r_K}} \left[\beta \cos \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2} + \alpha \sin \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2} \right] \quad (13d)$$

$$\vartheta_\mu = \arctg \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2} \quad (13e)$$

$$\vartheta_\varepsilon = \arctg \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2}. \quad (13f)$$

Die Gl. (13d) liefert die elektrische Leitfähigkeit in $\Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$ auf Grund folgender Beziehung:

$$\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon = \frac{G}{\omega C} = 4\pi \cdot 9 \cdot 10^{11} \frac{\kappa}{\omega} = 60 \lambda \kappa. \quad (13g)$$

Das im vorstehenden niedergelegte Rechenverfahren erfordert eine umfangreiche Rechenarbeit: Die in den Gl. (8c) und (8d) niedergelegten Größen r und $\operatorname{tg} \vartheta$ bedingen im Leerlauf und Kurzschluß 20 primitive Rechenoperationen und 6 Ta-

bellennwerte. α und β erfordern weitere 12 primitive und 4 Tabellenoperationen (Gl. 10b und 10c!) und die Gl. (13a), (13b), (13e) und (13f) insgesamt 13 primitive und 3 Tabellenoperationen. Alles in allem sind also für die vier Materialkonstanten ε , μ , ϑ_K und ϑ_L 45 primitive Operationen und 14 Tabellenwerte erforderlich. Ein Teil dieser Arbeit kann durch graphische Methoden ersetzt werden. Dies betrifft vor allem die Ermittlung der Eingangswiderstände: Bekanntlich³⁾ bilden die geometrischen Orte gleicher ϱ -Werte und gleicher φ -Werte ein System orthogonaler Kreisscharen, wenn auf Abszisse und Ordinate die Komponenten des komplexen Eingangsleitwertes dargestellt werden. Diese Kreisscharen gestatten als Polarkoordinaten, auch Betrag und Phase, also die uns interessierenden Größen, zu entnehmen. Da sie aber die gesamte Koordinatenebene ausfüllen, kommt es häufig vor, daß man Bereiche der Darstellung aufsuchen muß, die entweder überhaupt nicht oder nur ungenau auf dem Diagramm enthalten sind. Aus diesem Grunde ist es zweckmäßig, das die Koordinatenebene ausfüllende Diagramm auf einen Einheitskreis abzubilden. Es entsteht infolge der Koordinatentransformationen aber der Nachteil, daß zwar die cartesischen, nicht aber die Polarkoordinaten von \Re bzw. $1/\Re$ entnommen werden können. Um zu diesen zu gelangen, sind also zusätzlich 4 primitive Rechenoperationen und 1 Tabellenwert je im Leerlauf und Kurzschluß erforderlich, also insgesamt 10 Operationen. Da die Bestimmung von ϱ und φ ebenfalls einige Rechenoperationen erfordert, bedeutet also die Benutzung des letzterwähnten Diagramms etwa eine Halbierung der Rechenarbeit, die zur Ermittlung des Eingangswiderstandes erforderlich ist. Da sich nun aber gerade die durch das Diagramm abgenommene Arbeit der Ermittlung der Rechtwinkelkomponenten bei zweckmäßiger Umformung von Gl. (7) in den meisten praktischen Fällen ganz wesentlich herabsetzen läßt, wie weiter unten gezeigt wird, und diese Arbeit nur etwa ein Viertel der insgesamt aufzuwendenden Rechenarbeit darstellt, haben wir hier in Anbetracht der hohen Anforderungen, die an ein gutes Diagramm zu stellen sind, ein solches nicht in Gebrauch genommen.

Abschließend sei angegeben, wie sich das angeführte Verfahren vereinfacht, wenn die Proben keine Verluste aufweisen, d. h. wenn $\vartheta_K = \vartheta_L = 0$ gilt. Aus den Gl. (13e) und (13f) folgt, daß dann $\beta = \vartheta_L + \vartheta_K = 0$ wird. $\beta = 0$ wiederum bedingt nach Gl. (10b) $\cos \frac{\vartheta_K - \vartheta_L}{2} = 0$ bzw. $\sin \frac{\vartheta_K - \vartheta_L}{2} = \pm 1$. Da α eine positive Größe ist, folgt somit aus Gl. (10a)

$$\operatorname{tg} \alpha d = \sqrt{\frac{r_K}{r_L}}. \quad (14a)$$

Die Gl. (13a) und (13b) lauten wegen $\vartheta_L + \vartheta_K = 0$

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\alpha}{\sqrt{r_K r_L}} \quad (14b)$$

$$\mu = \frac{\lambda}{2\pi} \alpha \sqrt{r_K r_L}. \quad (14c)$$

Im dämpfungsfreien Fall ist $W = 0$. Die r -Werte folgen aus der vereinfachten Gl. (8c):

$$r^2 = \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}. \quad (14d)$$

Die Berechnung von ε und μ erfordert insgesamt 17 Rechenoperationen.

3. Allgemeines Auswerteverfahren unter Verwendung komplexer tg-Tafeln

Aus der Gl. (6)

$$\Re = Z \frac{1 + \varrho e^{-j\varphi}}{1 - \varrho e^{-j\varphi}} \quad (6)$$

folgt mit $\varrho = e^{-\pi}$

$$\Re = Z \frac{1 + e^{-(\pi + j\varphi)}}{1 - e^{-(\pi + j\varphi)}} = Z C \operatorname{tg} \frac{\pi + j\varphi}{2} \quad (15)$$

Der Eingangswiderstand \Re der Gl. (15) ist sozusagen von der Leitungsseite her berechnet. Er läßt sich von der Probe her bekanntlich in der Form angeben:

$$\Re_L = 3 C \operatorname{tg} \gamma d \quad \Re_K = 3 \operatorname{Tg} \gamma d. \quad (16)$$

Die Zusammenfassung der Gl. (15) und (16) liefert:

$$3 C \operatorname{tg} \gamma d = Z C \operatorname{tg} \frac{\pi + j\varphi_L}{2} \quad (17a)$$

$$3 \operatorname{Tg} \gamma d = Z C \operatorname{tg} \frac{\pi_K + j\varphi_K}{2} \quad (17b)$$

Hierin ist

$$\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2} \ln \varrho = \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} W, \quad (18a)$$

wie mittels des Integraltheorems der ArTg -Funktion $\operatorname{ArTg} W = \int \frac{dW}{1 - W^2}$ durch

Differenzieren von $\ln \varrho = \ln \frac{1 - W}{1 + W}$ und $\operatorname{ArTg} W$ nach W leicht abgeleitet werden kann. Auf Grund der Beziehungen (4) und (18a) lassen sich die Argumente in den Formeln (17) umformen zu

$$\frac{\pi_L + j\varphi_L}{2} = j \frac{\varphi_L - j\pi_L}{2} = j \left[2\pi \frac{l + d}{\lambda} - j \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} W_L \right] = j L \quad (18b)$$

$$\frac{\pi_K + j\varphi_K}{2} = j \frac{\varphi_K - j\pi_K}{2} = j \left[2\pi \frac{k + d}{\lambda} - j \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} W_K - \frac{\pi}{2} \right] = j \left(K - \frac{\pi}{2} \right) \quad (18c)$$

Die durch Gl. (18b) und (18c) definierten Größen L und K sollen im folgenden als „Leerlauf“ bzw. „Kurzschlußgröße“ bezeichnet werden. Sie sind unmittelbar durch die Messung gegeben. Werden L und K in den Gl. (17) eingeführt und dabei Gebrauch gemacht von den Gl. (11a) und (11b)

$$3 = Z \sqrt{\frac{\mu^+}{\varepsilon^+}} \quad (11a)$$

$$\gamma = j \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\varepsilon^+ \mu^+}, \quad (11b)$$

so erhält man nach wenigen Schritten

$$\sqrt{\frac{\varepsilon^+}{\mu^+}} \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{\varepsilon^+ \mu^+} \right) = \operatorname{tg} L. \quad (19a)$$

$$\sqrt{\frac{\mu^+}{\varepsilon^+}} \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{\varepsilon^+ \mu^+} \right) = \operatorname{tg} K. \quad (19b)$$

Durch Multiplikation von (19a) mit (19b) folgt

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{\varepsilon^+ \mu^+}\right) = \sqrt{\operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K}. \quad (19c)$$

bzw.

$$\sqrt{\varepsilon^+ \mu^+} = \frac{\lambda}{2\pi d} \arctan \sqrt{\operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K}. \quad (19d)$$

Macht man hiervon Gebrauch, so erhält man durch Multiplikation mit (19a)

$$\varepsilon^+ \operatorname{tg} \frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{\varepsilon^+ \mu^+} = \frac{\lambda}{2\pi d} \operatorname{tg} L \cdot \arctan \sqrt{\operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K}.$$

Wird hierin wiederum von (19c) Gebrauch gemacht, so folgt

$$\left\| \frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon^+ = \operatorname{tg} L \frac{\arctan \sqrt{\operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K}}{\sqrt{\operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K}} \right. \quad (20a)$$

und entsprechend

$$\left\| \frac{2\pi d}{\lambda} \mu^+ = \operatorname{tg} K \frac{\arctan \sqrt{\operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K}}{\sqrt{\operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K}} \right. \quad (20b)$$

Die Bestimmung des Betrages und der Phase von komplexer DK und Permeabilität mit Hilfe der komplexen Gl. (20) erfordert insgesamt 18 Rechenoperationen, darunter 6 Tabellenoperationen, wenn die komplexen Funktionen $\operatorname{tg} z$ und $\frac{\arctan z}{z}$ tabelliert vorliegen. Die tg -Funktion muß dabei als Eingang in rechtwinkligen und als Ausgang in Polarkoordinaten angegeben sein, die Funktion $\frac{\arctan z}{z}$ ist zweckmäßig in Eingang und Ausgang in Polarkoordinaten angegeben. In dem Tabellenwerk von Hawelka⁷⁾ ist die Funktion $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} x + jy\right) = t \cdot j^r$ niedergelegt, die Funktion $\frac{\arctan z}{z}$ dagegen ist unseres Wissens nirgends tabelliert. Aus diesem Grunde hat sich H. Metzler der Arbeit unterzogen und die Funktion $\frac{1}{t \cdot j^r} \arctan(t \cdot j^r) = r \cdot j^e$ in dem interessierenden Bereich berechnet⁸⁾.

4. Auswerteverfahren für rein dielektrische Proben ($\mu^+ = 1$)

Für den Fall rein dielektrischer Substanzen mit $\mu = 1$ und $\operatorname{tg} \vartheta_\mu = 0$ sind die vorstehend gebrachten Auswertungsmethoden unzweckmäßig, da sie die Ermittlung von insgesamt vier Meßgrößen voraussetzen. Es liegt nahe, zu versuchen, nur mit den Leerlaufgrößen W_L und l auszukommen. Dies ist mit Gl. (19a) möglich, die umgeformt in unserem Fall

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{\varepsilon^+}\right) = \frac{2\pi d}{\lambda} \operatorname{tg} L \quad (21)$$

lautet. Diese Gleichung läßt sich nach ε^+ nur dann auflösen, wenn man im Besitz der komplexen Funktion $z = w \operatorname{tg} w$ ist⁹⁾.

⁷⁾ Hawelka-Emde, Tafeln der komplexen Kreis- und Hyperbelfunktionen, Vieweg, Braunschweig.

⁸⁾ Diese Funktion wurde von G. Untermann (Frankfurter Dissertation 1944) berechnet und graphisch in weitem Bereich dargestellt.

(19c) Im folgenden soll nun ein Näherungsverfahren angegeben werden, das in allen praktisch vorkommenden Fällen Resultate ausreichender Genauigkeit liefert, die komplexe Funktion w tg w vermeidet und einfach in der Anwendung ist.

(19d) Es sei zunächst überschlagen, wie groß für rein dielektrische Proben die Kurzschlußgrößen W_K und k werden. In Gl. (19b) werde der tg -Ausdruck der linken Seite durch die zwei ersten Glieder seiner Potenzdarstellung und der rechte tg -Ausdruck, der um den Faktor $\sqrt{\epsilon^+}$ kleiner als der linke ist, durch sein Argument ersetzt: Dies ist um so eher statthaft, je kleiner d gegen λ ist. Man erhält so

$$K = \frac{2\pi d}{\lambda} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \right)^2 \epsilon^+ \right]$$

(20a) Auftrennung in Real- und Imaginärteil liefert

$$k = \frac{1}{3} d \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \right)^2 \epsilon \quad (22)$$

$$(20b) \quad \text{Ar } Tg \ W_K = \frac{1}{3} \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \right)^3 \epsilon \ tg \ \vartheta_e. \quad (22a)$$

Man erkennt, daß in allen praktisch vorkommenden Fällen k und W_K zu klein werden, um meßbar zu sein (z. B. folgt für $\epsilon = 80$, $\epsilon \cdot tg \ \vartheta_e = 30$ und $\lambda = 50$ cm bei einem $d = 2$ mm, $k = 0,03$ mm, $W_K = 1,6 \cdot 10^{-3}$!). Hieraus folgt zweierlei: Erstens verbietet die Unmöglichkeit der Kurzschlußgrößenbestimmung die Anwendung des oben dargestellten komplexen Rechenverfahrens (20a). Zweitens folgt aus der Kleinheit von $tg \ K$, daß $\arctg \sqrt{tg \ L \cdot tg \ K} / \sqrt{tg \ L \cdot tg \ K}$ nur geringfügig von 1 abweicht, daß also die Beziehung (20a) durch

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \epsilon^+ = tg \ L \quad (23)$$

in erster Näherung ersetzt werden darf. Welches ist der Gültigkeitsbereich der Beziehung (23)?

Durch Entwickeln des ersten tg -Ausdruckes der Gl. (21) ergibt sich

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \epsilon^+ \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \right)^2 \epsilon^+ + \frac{2}{15} \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \right)^4 \epsilon^{+2} + \dots \right] = tg \ L. \quad (24a)$$

Es ist nun zweckmäßig, die Reihe der inversen Funktion $\epsilon^+ = g(tg \ L)$ zu bestimmen. Zu diesem Zweck setzt man diese Reihe zunächst mit unbestimmten Koeffizienten an

$$\epsilon^+ = \frac{\lambda}{2\pi d} tg \ L [1 + a_1 tg \ L + a_2 \cdot tg^2 \ L + \dots] \quad (24b)$$

und geht mit diesem Ausdruck in Gl. (24a) ein. Es ergeben sich so nach der bekannten Methode der unbestimmten Koeffizienten Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten $a_1, a_2 \dots$ Ihre Auflösung liefert

$$a_1 = -\frac{1}{3} \frac{2\pi d}{\lambda}; a_2 = \frac{4}{45} \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \right)^3; \dots$$

Gl. (24b) lautet hiermit also

$$\epsilon^+ = \frac{\lambda}{2\pi d} tg \ L \left[1 - \frac{1}{3} \frac{2\pi d}{\lambda} tg \ L + \frac{4}{45} \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \right)^2 tg^2 \ L + \dots \right]. \quad (24c)$$

Die Reihe sei nach ihrem dritten Glied abgebrochen. Auftrennung in Real- und Imaginärkomponente führt nach einigen Zwischenschritten mit der Bezeichnung

$$\operatorname{Re} - j \operatorname{Im} = \operatorname{tg} L$$

zu den Beziehungen

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon = \operatorname{Re} \left[1 - \frac{1}{3} \frac{2\pi d}{\lambda} \operatorname{Re} \left(1 - \frac{\operatorname{Im}^2}{\operatorname{Re}^2} \right) + \frac{4}{45} \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \right)^2 \operatorname{Re}^2 \left(1 - 3 \frac{\operatorname{Im}^2}{\operatorname{Re}^2} \right) \right] \quad (24)$$

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_e = \operatorname{Im} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{2\pi d}{\lambda} \operatorname{Re} + \frac{4}{45} \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \right)^2 \operatorname{Re}^2 \left(3 - \frac{\operatorname{Im}^2}{\operatorname{Re}^2} \right) \right].$$

Die Reihen sind offenbar für nicht zu großes $\operatorname{Im}^2/\operatorname{Re}^2$ alternierend. Wird daher gefordert, daß das dritte Glied der ersten Reihe kleiner als 0,01 ist, so gilt mit mindestens 1% Genauigkeit für ε und 3% Genauigkeit für $\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_e$:

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon = \operatorname{Re} \left[1 - 2,1 \frac{d}{\lambda} \operatorname{Re} \left(1 - \frac{\operatorname{Im}^2}{\operatorname{Re}^2} \right) \right] \quad (25a)$$

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_e = \operatorname{Im} \left[1 - 4,2 \frac{d}{\lambda} \operatorname{Re} \right]. \quad (25b)$$

Die Gl. (25) beantworten die Frage nach dem Fehler der Beziehung (23): Der Relativfehler von Real- und Imaginärteil der Gl. (23) ist gleich den Subtrahenden der Beziehungen (25). Die Forderung

$$\frac{4}{45} \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \right)^2 \cdot \operatorname{Re} \left(1 - 3 \frac{\operatorname{Im}^2}{\operatorname{Re}^2} \right) < 0,01 \quad (25c)$$

bedingt, daß für nicht zu großes Verhältnis $\operatorname{Im}/\operatorname{Re}$

$$\frac{1}{3} \frac{2\pi d}{\lambda} \operatorname{Re} \left(1 - \frac{\operatorname{Im}^2}{\operatorname{Re}^2} \right) < 0,1$$

$$\frac{2}{3} \frac{2\pi d}{\lambda} \operatorname{Re} < 0,2$$

gilt. Hieraus folgt: Die Forderung (25c) bedeutet, daß der Realteil von Gl. (23) auf wenigstens 10%, der Imaginärteil auf wenigstens 20% genau richtig ist.

Auf Grund des Vorgesagten begeht man keinen großen Fehler, wenn man für Abschätzungen in Gl. (25c) Re durch $(2\pi d/\lambda)$ und Im durch $(2\pi d/\lambda) (\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_e)$ ersetzt. Dann geht (25c) unter der Annahme $\operatorname{tg} \vartheta_e < \sqrt{2/3}$ über in

$$\frac{4}{45} \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \right)^4 \cdot \varepsilon^2 (1 - 3 \operatorname{tg}^2 \vartheta_e) < \frac{4}{45} \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{\varepsilon} \right)^4 < 0,01; d < \frac{\lambda}{10,9 \sqrt{\varepsilon}}. \quad (23d)$$

Die Forderung (23d) ist in allen praktisch auftretenden Fällen erfüllt (z. B. bedingt $\varepsilon = 100$ bei $\lambda = 50$ cm ein d von weniger als 5 mm!).

Damit ist gezeigt, daß die Gl. (25) mit höchstens 1% bzw. 3% Fehler behaftete Ergebnisse liefert.

Die Anwendung der Formeln (25) ist einfach, da die Größen $2\pi d/\lambda$ und Re sowie Im ohnehin bei jedem Auswerteverfahren bestimmt werden müssen. Zu der durch Gl. (23) bedingten Arbeit kommen noch 7 Rechenoperationen hinzu.

⁹⁾ Das Verfahren ist korrekt, wenn Betrag und Phase der Größen $\operatorname{tg} L$ und $\operatorname{tg} K$ um weniger als die geforderte Meßgenauigkeit durch den Faktor $1 - 1/3 \operatorname{tg} L \operatorname{tg} K$ beeinflusst werden.

5. Auswertung bei sehr dünnen Proben ($2\pi d \ll \lambda$)^{a)}

Ist die Probe so dünn, daß der durch sie gegebene komplexe Widerstand als praktisch punktförmig konzentriert angesehen werden kann, so werden $\operatorname{tg} L$ und $\operatorname{tg} K$, wie man den Gl. (20) ansieht, zu so kleinen Größen, daß im Ausdruck

$$\frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K}}{\sqrt{\operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K}} = 1 - \frac{1}{3} \operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K \dots$$

das Produkt $\frac{1}{3} \operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K$ gegen 1 vernachlässigt werden darf. Man erkennt so, daß das $\operatorname{arc} \operatorname{tg} z/z$ -Glieder der Gl. (20) eine Korrektur der „Punktabschlußgleichungen“

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon^+ = \operatorname{tg} L; \quad \frac{2\pi d}{\lambda} \mu^+ = \operatorname{tg} K \quad (23)$$

darstellt, die um so beträchtlicher wird, je größer der von der Probe aufgenommene Teil der Welle infolge größerer Dicke d wird.

Wird auf die komplexen tg -Funktionen $\operatorname{tg} L$ und $\operatorname{tg} K$ das Additionstheorem der komplexen tg -Funktion

$$\operatorname{tg}(x - jy) = \frac{\operatorname{tg} x (1 - \operatorname{tg}^2 y) - j \operatorname{tg} x y (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 y} = \operatorname{Re} - j\operatorname{Im}$$

angewandt, so erhält man nach Komponententrennung aus Gl. (23)

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon = \operatorname{tg} \left[\frac{2\pi}{\lambda} (l + d) \right] \frac{1 - W_L^2}{1 + W_L^2 \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{\lambda} (l + d)} = \operatorname{Re} \quad (26a)$$

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_e = W_L \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{\lambda} (l + d)}{1 + W_L^2 \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{\lambda} (l + d)} = \operatorname{Im}. \quad (26b)$$

Die entsprechenden Gleichungen für μ erhält man, wie auch im folgenden immer, wenn l durch k und W_L durch W_K ersetzt wird. Die Gl. (26) sind auch aus Gl. (7) leicht ableitbar, wenn dort Real- und Imaginärteil von \Re getrennt und für ϱ und φ die Größen W_L und l eingeführt werden.

Welches ist der Fehler der Gl. (23), (26a) und (26b)? Wie aus der Ableitung ersichtlich, wird der Fehler dadurch hervorgerufen, daß $\operatorname{arc} \operatorname{tg} z/z$ durch 1 ersetzt wird. Da die Potenzreihendarstellung von $\operatorname{arctg} z$ alternierend ist, genügt es zur Abschätzung des Fehlers, die durch das zweite Glied der Reihe bedingte Korrektur der Beziehungen (26) zu erfassen. Man erhält so

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon^+ = (R_L - jJ_L) \left[1 - \frac{1}{3} (R_L - jJ_L) (R_K - jJ_K) \right]. \quad (27)$$

Darin sind R_L und R_K die Realteile von $\operatorname{tg} L$ und $\operatorname{tg} K$, J_L und J_K deren Imaginärteile. Trennt man die Real- und Imaginärteile beider Seiten von Gl. (27), so folgt nach kurzer Zwischenrechnung

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon = R_L \left[1 + \frac{1}{3} \left(2J_L J_K - R_L R_K + J_L^2 \frac{R_K}{R_L} \right) \right] \quad (27a)$$

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_e = J_L \left[1 - \frac{1}{3} \left(2R_L R_K - J_L J_K + R_L^2 \frac{J_K}{J_L} \right) \right]. \quad (27b)$$

Die Gl. (27a) und (27b) lassen den Fehler der Beziehungen (26) erkennen:
Es ist

$$\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{3} \left(2 J_L J_K - R_L R_K + J_L^2 \frac{R_K}{R_L} \right) \quad (28)$$

$$\frac{\Delta \kappa}{\kappa} = -\frac{1}{3} \left(2 R_L R_K - J_L J_K + R_L^2 \frac{J_K}{J_L} \right).$$

Die Gl. (27) sind eine Verallgemeinerung der Gl. (25) für rein dielektrische Proben. Man erhält die letzteren aus (27a) und (27b), wenn man, was in der Korrektur statthaft ist, $R_K = 1$ und $J_K = 0$ setzt.

Für den praktischen Gebrauch ist es oft nützlich, zu wissen, wie die Korrekturwerte mit dem Materialkonstanten zusammenhängen. Da die Korrekturwerte ohnehin für nicht zu schlechte Konvergenz der arctg z -Reihe Gültigkeit beanspruchen, wird man sie als zuverlässig ansehen, so lange sie gegen 1 nicht zu groß werden (etwa 0,1 obere Grenze!). Man begeht dann nur einen Fehler höherer Ordnung, wenn man von den Beziehungen (26) Gebrauch macht. So folgt

$$\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} \sim \frac{1}{3} \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \right)^2 \varepsilon \mu \left[\operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon (\operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon + 2 \operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon) - 1 \right] \quad (28a)$$

$$\frac{\Delta \kappa}{\kappa} \sim \frac{1}{3} \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \right)^2 \varepsilon \mu \left[\operatorname{tg} \vartheta_\mu (\operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon + \frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon}) - 2 \right]. \quad (28b)$$

Für Proben mit vernachlässigbarem $\operatorname{tg} \vartheta_\mu$ und kleinerem $\operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon$ ist dies identisch mit

$$\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} < \frac{1}{3} \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \right)^2 \varepsilon \mu; \quad \frac{\Delta \kappa}{\kappa} < \frac{2}{3} \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \right)^2 \varepsilon \mu.$$

Die Fehler sind kleiner als 3% bzw. 6%, wenn $\sqrt{\varepsilon \mu} < \lambda/20d$ erfüllt ist. Man wird sich somit merken: Proben mit nicht zu hohem Verlust können nach den „Punktformeln“ ausgewertet werden, wenn $\sqrt{\varepsilon \mu} < \lambda/20d$ erfüllt wird.

In diesem Zusammenhang ist folgende Überlegung von Interesse: Aus der Näherungsformel (gültig für $\operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K < 1$)

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon^+ = \operatorname{tg} L \left(1 - \frac{1}{3} \operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K \right)$$

folgt

$$\frac{\lambda}{2\pi d \varepsilon^+} = \operatorname{ctg} L - \frac{1}{3} \operatorname{tg} K.$$

Da für den komplexen Leitwert der Probe die folgende Formel gilt

$$G = (G + j\omega \varepsilon C) d = j\omega \varepsilon C d \left(1 - j \frac{G}{\omega \varepsilon C} \right) = j \frac{2\pi d}{\lambda} \frac{\varepsilon^+}{Z},$$

ergibt sich unter Verwendung von Gl. (17a) und (17b) die Beziehung

$$\frac{1}{G} = \Re_L - \frac{1}{3} \Re_K \quad (29a)$$

und analog für $\Re = (R + j\omega \mu L) d$:

$$\frac{1}{\Re} = G_K - \frac{1}{3} G_L. \quad (29b)$$

Wir kommen somit zu der Aufstellung des folgenden Satzes: Der komplexe Widerstand der Probe bei Leerlauf ist um ein Drittel des Kurzschlußeingangswiderstandes kleiner als der Leerlaufeingangswert, der Kurzschlußleitwert um ein

Drittel des Leerlaufeingangswertes kleiner als der Kurzschlußeingangswert. Dieser Satz ist um so exakter gültig, je geringer \Re_K gegen \Re_L bzw. G_L gegen G_K ist. Wird die Probe dünn, so wird \Re_L groß gegen \Re_K und G_K groß gegen G_L , d. h. $1/G$ wird mit \Re_L und $1/\Re$ mit G_K identisch. Dies entspricht dem Inhalt der „Punktformeln“.

Hat man sich an das Arbeiten mit komplexen tg-Tafeln einmal gewöhnt, so sind die Gl. (23) besonders einfach im Gebrauch. Man wird dann die Gleichungen (26) nur noch in den Fällen anwenden, in denen sie infolge besonderer Gegebenheiten besonders einfach zu gebrauchen sind. Hiervon wird im folgenden die Rede sein.

Bei Proben, die nicht zu große Verschiebungen bedingen, ist es zweckmäßig, die Gl. (26) etwas umzuformen und wie folgt zu verwenden:

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} (l + d) \left[1 - \frac{W_L^2}{1 - (1 - W_L^2) \sin^2 2\pi \frac{l+d}{\lambda}} \right] \quad (30a)$$

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_s = W_L \frac{1}{1 - (1 - W_L^2) \sin^2 2\pi \frac{l+d}{\lambda}} \quad (30b)$$

Die Größen $\frac{W_L^2}{1 - (1 - W_L^2) \sin^2 2\pi \frac{l+d}{\lambda}}$ und $(1 - W_L^2) \sin^2 2\pi \frac{l+d}{\lambda}$ sind offenbar Korrekturen, um die die einfachen Beziehungen

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} (l + d) \quad (31a)$$

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_s = 60 \lambda \kappa = W_L \quad (31b)$$

prozentual zu verbessern sind, um zu den exakten Ergebnissen zu gelangen. In sehr vielen Fällen genügt es, diese Korrekturwerte nur zu überschlagen, um Endresultate ausreichender Genauigkeit zu erhalten. Vor allem bei Serienmessungen wird man so vorgehen, daß die Korrektur für den Fall größter Werte W_L und l zunächst abgeschätzt wird. Ist sie dann kleiner als die Meßgenauigkeit, so wird man bei allen Proben nur noch mit den Beziehungen (31) rechnen.

Wird die Verschiebung so klein, daß der tg-Ausdruck von (31a) durch sein Argument ersetzt werden darf, so geht Gl. (31a) über in

$$\varepsilon = 1 + \frac{l}{d} \quad (31c)$$

Der DK-Wert dieser Beziehung weicht von dem der Gl. (31a) um weniger als 3% ab, wenn die Forderung

$$l + d < \frac{\lambda}{20} \quad (32)$$

erfüllt wird. Die Gl. (31b) ist unter dieser Voraussetzung um höchstens 10%, für $W_L < 0,7$ um höchstens 5% gegen Gl. (30b) falsch.

Während die Gl. (30a) und (30b) für beliebige DK- und Leitwerte, also auch für große l und W_L -Werte gelten, sind (31a) und (31b) für kleine l und W_L gültig (31a gilt für kleines W_L , 31b für kleines l). Den Gl. (30) und (31) entnimmt man: Die DK wird um so mehr ausschließlich durch die Verschiebungsgröße l und ε um so mehr durch W_L allein bestimmt, je geringer die Probenstärke und damit auch l und W_L werden.

¹⁰⁾ Die folgenden Ausführungen sind vor allem von praktischer Bedeutung, wenn $\varepsilon d < \lambda/20$ gilt.

6. Extrem dünne leitende Proben¹⁰⁾

Bei sehr dünnen Proben (z. B. Papiere) mit vorwiegend ohmscher Leitfähigkeit ergeben sich wesentliche Vereinfachungen in der Auswertung der Gl. (26), wenn die Verschiebung l sehr klein ist oder nahe bei $\lambda/4$ liegt. Der erste Fall liegt meist vor, wenn der Ohmsche Widerstand der Probe größer als der Wellenwiderstand der Leitung ist, der zweite Fall, wenn er kleiner ist. Um einen Überblick über die Abhängigkeit der Verschiebung l von G zu gewinnen, ist in der Abb. 1 der Zusammenhang¹¹⁾

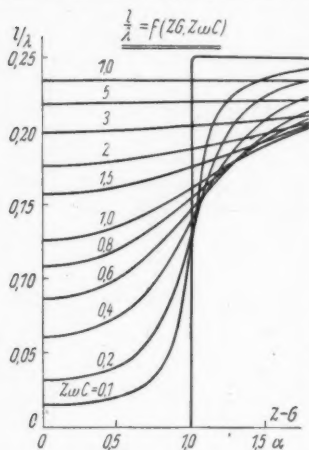


Abb. 1

$$\operatorname{tg} \frac{4\pi l}{\lambda} = \frac{2Z\omega C}{1 - (ZG)^2 - (Z\omega C)^2}$$

graphisch dargestellt. Darin ist l/λ als Funktion von $a = Z \cdot G$ gebracht, wobei $b = Z \omega C$ als Parameter gewählt ist. Man erkennt: Je kleiner $Z \omega C$ ist, um so mehr schmiegt sich der Kurvenverlauf dem Grenzfall $l = 0$ für $ZG < 1$ und $l = \lambda/4$ für $ZG > 1$ an. Bei Papieren mit stark überwiegender ohmscher Leitfähigkeit entspricht daher dem Übergang von kleinen l -Werten zu Werten in der Nähe von $\lambda/4$ nur ein geringes ZG -Intervall in der Nähe des Wertes $ZG = 1$. Aus diesem Grunde ist es lohnend, für Papiermessungen Formeln bereitzustellen, die für kleine und große l -Werte zweckmäßig sind.

1. Die Verschiebung ist klein¹²⁾

Die Forderung (32) sei erfüllt. Dann folgt aus Gl. (26a)

$$\varepsilon = \frac{l+d}{d} \left[1 - W_L^2 \left(1 + \operatorname{tg}^2 2\pi \frac{l+d}{\lambda} \right) \right]. \quad (33a)$$

An Stelle von $\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_e$ wird bei Papieren oft der Flächenwiderstand $F = 1/\kappa d$ eingeführt. Nach Gl. (13g) besteht zwischen diesen beiden Größen der Zusammenhang

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_e = \frac{2\pi d}{\lambda} 60 \lambda \kappa = \frac{120\pi}{F}. \quad (34)$$

Unter Benutzung dessen geht Gl. (26b) über in

$$\frac{120\pi}{F} = W_L \left[1 + (1 - W_L^2) \operatorname{tg}^2 2\pi \frac{l+d}{\lambda} \right]. \quad (33b)$$

Läßt sich die Forderung (32) durch die Forderung

$$l+d \approx \varepsilon d < \frac{\lambda}{20\pi} \quad (35)$$

¹¹⁾ Die Ableitung dieser Beziehung aus $\varrho e^{-j\varphi} = (R-Z)/(R+Z)$ ist einfach, da die Berechnung der Phase des Quotienten $(R-Z)/(R+Z)$ keine Schwierigkeiten bereitet¹³⁾.

¹²⁾ $l+d < \lambda/20$.

¹³⁾ Drude, Ann. Physik 61, 466 (1897).

verschärfen, so gilt mit höchstens 1% Fehler

$$\frac{120 \pi}{F} = W_L \quad (36a)$$

Gilt überdies

$$W_L < 0,7, \quad (37)$$

so wird mit der gleichen Genauigkeit

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{l'}{d}\right) (1 - W_L^2) \quad (36b)$$

2. Die Verschiebung ist groß

Es ist bei großer Verschiebung l zweckmäßig, die Verschiebung l' einzuführen, die die Spannungsverteilung erfährt, wenn die Probe durch eine Kurzschlußscheibe ersetzt wird. Die bei diesem Verfahren bestimmte Minimumlage unterscheidet sich von der bei Leerlauf ermittelten um $\lambda/4$. Somit muß $\lambda/4$ den Wert l' zu l ergänzen. Es gilt also

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} (l + d) = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{4} + l' + d\right) = -\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{\lambda} (l' + d).$$

Das negative Vorzeichen vor dem ctg -Ausdruck rührt offenbar daher, daß $l' + d$ und $l + d$ entgegengesetzt gerichtete Größen sind. Da bei der Messung nur der Betrag von $l' + d$ ermittelt werden muß, soll es im Folgenden fortfallen. Unter Einführung von l' folgt aus den Beziehungen (26) also:

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} (l' + d) \frac{\frac{1}{W_L^2} - 1}{1 + \frac{1}{W_L^2} \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{\lambda} (l' + d)} \quad (38a)$$

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_s = \frac{1}{W_L} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{\lambda} (l' + d)}{1 + \frac{1}{W_L^2} \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{\lambda} (l' + d)}. \quad (38b)$$

Die Beziehungen (38) entsprechen in ihrem Aufbau den Beziehungen (26). Wird die der Gl. (35) entsprechende Forderung

$$l' + d < \frac{\lambda}{20\pi} \quad (39)$$

aufgestellt, so folgt mit wenigstens 1% Genauigkeit

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{l'}{d}\right) \frac{\frac{1}{W_L^2} - 1}{1 + \left(\frac{2\pi l' + d}{\lambda W_L}\right)^2} \quad (40a)$$

$$\frac{F}{120\pi} = W_L \left[1 + \left(\frac{2\pi l' + d}{\lambda W_L}\right)^2\right] \quad (40b)$$

(Die weniger scharfe Forderung $l' + d < \lambda/20$ würde 3% maximalen Fehler bedingen).

In allen Fällen, die nicht unter eine der gestellten Voraussetzungen fallen, müssen die Gleichungen (26) oder (38) herangezogen werden. Gleichungen, die sowohl für l als auch l' gelten, erhält man bei der Berechnung des Verlustfaktors. Aus den Gl. (26) folgt exakt:

$$\operatorname{tg} \vartheta_s = \frac{2 W_L}{(1 - W_L)^2 \sin 4\pi \frac{l+d}{\lambda}}. \quad (41a)$$

Die doppelte Periodizität des sin-Gliedes bedingt den gleichen Wert für $\operatorname{tg} \vartheta_s$, wenn l' an Stelle von l eingeführt wird. Bei Proben mit großem $\operatorname{tg} \vartheta_s$ ist es anschaulicher, zur Charakterisierung des geringen Blindstromes den dazu reziproken Wert $1/\operatorname{tg} \vartheta_s$ einzuführen. Wird zudem (35) bzw. (39) als gültig vorausgesetzt, so folgt mit mindestens 2% Genauigkeit

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta_s} = \frac{2\pi l + d}{\lambda W_L} (1 - W_L^2) = \frac{2\pi l' + d}{\lambda W_L} (1 - W_L^2). \quad (41b)$$

Die Berechnung der $\operatorname{tg} \vartheta_s$ -Werte ist bei leitfähigen Papieren zweckmäßiger als die der DK-Werte, da hierbei neben der starken ohmschen Leitfähigkeit meist nur die Phasenlage des Stromvektors interessiert.

7. Nichtleitende Proben ($W_L, W_K < 0,1$)

Wir beschränken uns auf die Formeln für die elektrischen Stoff-Konstanten, da die magnetischen Konstanten aus gleich gebildeten Formeln mit k an Stelle von l und W_K an Stelle von W_L hervorgehen. Ist $\operatorname{tg} \vartheta_s = \operatorname{tg} \vartheta_\mu = 0$, so auch W_L und W_K . Aus Gl. (20a) folgt also allgemein

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} (l + d) \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} (l + d) \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} (k + d)}}{\sqrt{\operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} (l + d) \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} (k + d)}}. \quad (42)$$

Für $\mu = 1$ wird k zu klein, um bestimmbar zu sein. Dann wird die nach Gl. (21) gebildete Formel

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{\varepsilon} \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{\varepsilon} \right) = \frac{2\pi d}{\lambda} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} (l + d), \quad (43)$$

zweckmäßig benutzt. Sie erfordert die Kenntnis der Funktion $y = z \cdot \operatorname{tg} z$, die man sich leicht verschaffen kann.

Zu einer ausgezeichneten Näherungsformel gelangt man durch Entwickeln von Gl. (42). Es folgt zunächst für das $\operatorname{arctg} z/z$ -Glieder die Reihe

$$1 - \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} (l + d) \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} (k + d) + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{\lambda} (l + d) \cdot \operatorname{tg}^2 (k + d) + \dots$$

Man begeht einen Fehler von weniger als 5%, wenn man

$$l + d < \frac{\lambda}{10}; \quad k + d < \frac{\lambda}{10} \quad (44)$$

fordert und das zweite Reihenglied fortfallen läßt. Werden zudem im ersten Glied der Reihe die tg -Ausdrücke durch ihre Argumente ersetzt, so macht man einen

weiteren Fehler von maximal 6% in entgegengesetztem Sinn. Es gilt somit mit großer Genauigkeit für die Reihe der Ausdruck

$$1 - \frac{1}{3} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \cdot (l + d) \cdot (k + d).$$

Wird weiter $\operatorname{tg} (2\pi/\lambda) (l + d)$ durch die beiden ersten Glieder seiner Reihe ersetzt, so begeht man einen weiteren Fehler von maximal 2%. Es gilt also an Stelle von (42) in guter Näherung die Beziehung

$$\varepsilon = 1 + \frac{l}{d} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 (l + d)^2 \right] \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 (l + d) (k + d) \right].$$

Dies weicht unter der gemachten Annahme von

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{l}{d} \right) \left[1 + \frac{13,2}{\lambda^2} (l + d) (l - k) \right], \quad (45)$$

um weniger als 2% ab und zwar wieder im entgegengesetzten Sinn. Gl. (45) liefert also unter der Voraussetzung (44) mit wenigen Prozent Fehler behaftete Ergebnisse. Aus der im nächsten Abschnitt folgenden allgemeinen Fehlerbetrachtung ergibt sich, daß die Ungenauigkeit nicht größer als 4% werden kann (s. Gl. 55a für $v = 1$, $w = \infty$, und $A_L = 0$!) und mit der vierten Potenz des Quotienten $l + d/\lambda$ sich ändert. Die letzte Gleichung ist besonders angenehm im Gebrauch, da der relative Fehler der Beziehung $\varepsilon = 1 + l/d$ in ihr erkenntlich ist. Man kann sich meist mit seiner Abschätzung begnügen, da er unter der Voraussetzung (44) nicht 13% Fehler überschreiten kann.

8. Auswertung bei dünnen Proben

Es ist naheliegend, die im Abschnitt 5 gebrachten Verfahren, die für sehr dünne Proben gelten, zu ergänzen durch eine Reihenbetrachtung, die dem im Vorhergehenden für Blindwiderstände Gebrachten entspricht. In Gl. (20a) sei daher der komplexe $\operatorname{tg} L$ und das komplexe $\operatorname{arctg} z/z$ -Glieder in Reihe entwickelt, beider Produkt gebildet und dieses mit den vierten Potenzen abgebrochen. Man erhält so nach einigen Zwischenrechnungen

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} L &= L \left(1 + \frac{1}{3} L^2 + \frac{2}{15} L^4 \dots \right) \\ \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K}}{\sqrt{\operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K}} &= 1 - \frac{1}{3} L K - \frac{1}{9} L K (L^2 + K^2) + \frac{1}{5} L^2 K^2 \dots \\ \frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon &= L \left[1 + \frac{1}{3} L (L - K) \left(1 + \frac{2}{5} L^2 - \frac{4}{15} L K + \frac{1}{3} K^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Dies ist eine komplexe Gleichung vom Typ

$$v = (a_1 - j a_2) [1 + (b_1 + j b_2) (1 + c_1 + j c_2)]. \quad (47)$$

Seine Komponenten sind

$$\text{Realteil: } a_1 [1 + b_1 + b_1 c_1 - b_2 c_2] + a_2 [b_2 (1 + c_1) + b_1 c_2]. \quad (47a)$$

$$\text{Imaginärteil: } -a_2 [1 + b_1 + b_1 c_1 - b_2 c_2] + a_1 [b_2 (1 + c_1) + b_1 c_2]. \quad (47b)$$

Der Vergleich des v -Ausdruckes mit dem Wert von $(2\pi d/\lambda) \varepsilon^+$ ergibt mit den Ab-

kürzungen $\text{ArTg } W_L = A_L$ und $\text{ArTg } W_K = A_K$:

$$a_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (l + d) \quad (48a)$$

$$a_2 = A_L \quad (48b)$$

$$b_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 (l + d) (l - k) - A_L (A_L - A_K) \quad (48c)$$

$$-b_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) [(l + d) (A_L - A_K) + A_L (l - k)] \quad (48d)$$

$$c_1 = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \left[\frac{2}{5} (l + d)^2 - \frac{4}{15} (l + d) (k + d) + \frac{1}{3} (k + d)^2 \right] - \frac{2}{5} A_L^2 + \frac{4}{15} A_L A_K - \frac{1}{3} A_K^2 \quad (48e)$$

$$-c_2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \left[\frac{4}{5} (l + d) A_L - \frac{4}{15} (l + d) A_K + (k + d) A_L + \frac{2}{3} (k + d) A_K \right]. \quad (48f)$$

Wir wollen nun so verfahren, daß wir Näherungsgleichungen angeben, die man durch Abbrechen des v -Ausdruckes mit den b -Gliedern gewinnt und den Fehler dieser Gleichungen durch Diskussion des durch die c -Glieder bedingten Restes abschätzen. Die Komponenten der Gl. (47a) und (47b) sind mit dem $2\pi d/\lambda$ -fachen von ε und $\varepsilon \text{ tg } \vartheta_e$ identisch. Werden in ihnen die c -Glieder gestrichen und für die a - und b -Werte die Gl. (48) eingesetzt, so folgt

$$\left\| \begin{aligned} \varepsilon &= \left(1 + \frac{l}{d} \right) \left[1 + \frac{13,2}{\lambda^2} (l + d) (l - k) - \frac{1}{3} A_L^2 \frac{l - k}{l + d} - \frac{2}{3} A_L (A_L - A_K) \right] \\ \frac{2\pi d}{\lambda} \text{tg } \vartheta_e &= \end{aligned} \right. \quad (49a)$$

$$A_L \left[1 - \frac{A_L}{3} (A_L - A_K) + \frac{13,2}{\lambda^2} \left((l + d)^2 \frac{A_L - A_K}{A_L} + 2 (l + d) (l - k) \right) \right]. \quad (49b)$$

Die Beziehungen (49) sind einfach im Gebrauch, da die Glieder in den eckigen Klammern meist so klein sind, daß ihre Abschätzung ausreicht. Ist $A_L < 0,1$ und $A_K < 0,2$, so wird Gl. (49a) mit Gl. (45) identisch. Ist $l + d < \lambda/20\pi$ und $k + d < \lambda/10\pi$, so geht für $A_K < 2 A_L$ die Gl. (49b) in die Gl. (45) entsprechende Beziehung

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon \text{tg } \vartheta_e = A_L \left[1 - \frac{A_L}{3} (A_L - A_K) \right] \quad (50)$$

über.

Welches ist nun der durch Vernachlässigung der c -Glieder bedingte Fehler? Solange die Korrekturglieder in den eckigen Klammern der Gl. (49) kleiner als 1 sind, kann der relative DK-Fehler der Gl. (49a) gemäß Gl. (47a) mit

$$\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} = (b_1 c_1 - b_2 c_2) + \frac{a_2}{a_1} (b_2 c_1 + b_1 c_2) \quad (51a)$$

und der relative Leitfähigkeitsfehler der Gl. (49b) nach Gl. (47b) mit

$$\frac{\Delta \kappa}{\kappa} = (b_1 c_1 - b_2 c_2) - \frac{a_1}{a_2} (b_2 c_1 + b_1 c_2) \quad (51b)$$

in guter Näherung angegeben werden. Es sei jetzt gefordert

$$(48a) \quad l + d < \frac{\lambda}{10v}; \quad k + d < \frac{\lambda}{10v} \quad (52a)$$

$$(48b) \quad A_L < \frac{2\pi}{10w}; \quad A_K < \frac{2\pi}{10w}, \quad (52b)$$

(48c) wobei über die Konstanten v und w noch nicht verfügt werden soll. Dann folgt auf Grund der Gl. (48)

$$(48d) \quad |b_1| < \left[0,13 \frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}\right]; \quad |b_2| < \frac{0,26}{v \cdot w} \quad (53a)$$

$$(48e) \quad |c_1| < \left[0,026 \frac{11}{v^2} + \frac{4}{w^2}\right]; \quad |c_2| < \frac{0,58}{v \cdot w}. \quad (53b)$$

Unter Benutzung der Beziehungen (53) lassen sich obere Grenzen für die Klammerausdrücke der Beziehungen (51) angeben. Es folgt im einzelnen:

$$(48f) \quad |b_1 c_1 - b_2 c_2| < 0,04 \left[\frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}\right]^2 + \frac{0,15}{v^2 w^2} \quad (54a)$$

$$|b_2 c_1 + b_1 c_2| < \frac{0,15}{v w} \left[\frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}\right]. \quad (54b)$$

Nach den Gl. (48a), (48b), (51) und (54) erhält man als Abschätzung des Fehlers der Gl. (49) somit:

$$\frac{A_E}{\epsilon} < 0,04 \left[\frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}\right]^2 + \frac{0,15}{v^2 w^2} + \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{A_L}{l + d} \cdot \frac{0,15}{v \cdot w} \left[\frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}\right] \quad (55a)$$

$$(49a) \quad \frac{A_K}{\kappa} < 0,04 \left[\frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}\right]^2 + \frac{0,15}{v^2 w^2} + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{l + d}{A_L} \frac{0,15}{v \cdot w} \left[\frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}\right]. \quad (55b)$$

Man erkennt: Die Gl. (49) liefern für die Realkomponente bei $A_L < 2\pi/\lambda (l + d)$ und für die Imaginärkomponente bei $A_L > (2\pi/\lambda) (l + d)$ ungenauere Ergebnisse als für die Imaginär- bzw. Realkomponente. Umgekehrt gilt für

$$A_L < \frac{2\pi}{\lambda} (l + d): \quad \frac{A_E}{\epsilon} < 0,04 \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{w}\right)^4 \quad (56a)$$

$$A_L < \frac{2\pi}{\lambda} (l + d): \quad \frac{A_K}{\kappa} < 0,04 \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{w}\right)^4. \quad (56b)$$

(50) Die Beziehungen (49) sind daher besonders geeignet für die DK-Bestimmung schlecht ohmisch leitender Proben und die Leitwert-Bestimmung gut ohmisch leitender Proben.

Wenden wir uns den Fällen geringer Dämpfung zu, so ergibt sich folgendes: Für $W_L \approx A_L < 0,1$ und $W_K \approx A_K < 0,2$ stimmt Gl. (45) mit der allgemein als gültig erkannten Beziehung (49a) praktisch überein. Der exakte Wert von Gl. (49a) ist etwas kleiner und zwar um höchstens 1%. Da unter den gemachten Voraussetzungen $A_L < 0,1$ und $A_K < 0,2$, $W < 2$ und auf Grund der Voraussetzung (44) $V < 1$ gilt, ergibt sich, daß der durch Vernachlässigung der höheren Glieder bedingte Fehler nach Gl. (55a) kleiner als 7% ist, wenn $A_L < (2\pi/\lambda) (l + d)$ erfüllt ist. Wird $A_L, A_K < 1/20$ gefordert, so ist er kleiner als 5%, im Falle $A_L = A_K = 0$ kleiner als 4%.

Formelzusammenstellung zur Ermittlung der elektrischen und magnetischen Materialkonstanten im Dezimeterbereich

1. Verfahren für Proben beliebiger Materialwerte (ohne Verwendung komplexer Funktionen)

$$\varphi_L = \frac{4\pi}{\lambda} (l + d) \quad (1a)$$

$$\varphi_K = \frac{4\pi}{\lambda} (k + d) - \pi \quad (1b)$$

$$r^2 = \frac{1 + w^2 + (1 - w^2) \cos \varphi}{1 + w^2 - (1 - w^2) \cos \varphi} \quad (1c)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = -\frac{1 - w^2}{2w} \sin \varphi \quad (1d)$$

$$\operatorname{Tg} 2\beta d = \frac{2\sqrt{r_K/r_L}}{1 + r_K/r_L} \cos \frac{\vartheta_K - \vartheta_L}{2} \quad (1e)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha d = \frac{2\sqrt{r_K/r_L}}{1 - r_K/r_L} \sin \frac{\vartheta_L - \vartheta_K}{2} \quad (1f)$$

$$\mu = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{r_L r_K} \left[\alpha \cos \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2} + \beta \sin \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2} \right] \quad (1g)$$

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r_L \cdot r_K}} \left[\alpha \cos \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2} - \beta \sin \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2} \right] \quad (1h)$$

$$\vartheta_\mu = \arccos \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2} \quad (1i)$$

$$\vartheta_\varepsilon = \arccos \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2} \quad (1k)$$

In den folgenden Abschnitten werden nur Formeln für ε und $\varepsilon \cdot \operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon$ angegeben. Die entsprechenden Gleichungen für die magnetischen Stoffkonstanten erhält man, wenn l durch k und W_L durch W_K in den gebrachten Gleichungen ersetzt wird.

2. Verfahren für Proben beliebiger Werte (unter Verwendung komplexer Funktionen)

$$L = 2\pi \frac{l + d}{\lambda} - j \operatorname{ArTg} W_L \quad (2a)$$

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon^+ = \operatorname{tg} L \frac{\arccos \operatorname{tg} \sqrt{\operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K}}{\sqrt{\operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K}} \quad (2b)$$

3. Verfahren für $\mu^+ = 1$

$$\text{In} \quad \operatorname{tg} L = \operatorname{Re} - j \operatorname{Im} \quad (3a)$$

ist $\operatorname{tg} L$ durch die Gl. (2a) definiert. Es gilt in ausreichender Näherung

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon = \operatorname{Re} \left[1 - 2,1 \frac{d}{\pi} \operatorname{Re} \left(1 - \frac{\operatorname{Im}^2}{\operatorname{Re}^2} \right) \right] \quad (3b)$$

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon = \operatorname{Im} \left[1 - 4,2 \frac{d}{\lambda} \operatorname{Re} \right]. \quad (3c)$$

Bei nicht zu großem Verhältnis Im/Re sind die Gleichungen anwendbar, wenn

$$\sqrt{\varepsilon} < \frac{10d}{\lambda} \quad (3d)$$

erfüllt wird. Wird der Forderung (3d) nicht genügt, so muß nach der Gleichung

$$\sqrt{\varepsilon^+} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{\varepsilon^+} \right) = \operatorname{tg} L \quad (3e)$$

unter Zuhilfenahme der komplexen Funktion $z = w \cdot \operatorname{tg} w$ gearbeitet werden.

4. Verfahren für sehr dünne Proben

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon = R_L = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} (l+d) \frac{1 - W_L^2}{1 + W_L^2 \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{\lambda} (l+d)} \quad (4a)$$

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_e = I_L = W_L \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{\lambda} (l+d)}{1 + W_L^2 \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{\lambda} (l+d)} \quad (4b)$$

Der Fehler der Beziehung ist abschätzbar nach

$$3 \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} = 2 I_L I_K - R_L R_K + I_L^2 \frac{R_K}{R_L} \quad (4c)$$

$$3 \frac{\Delta (\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_e)}{\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_e} = 2 R_L R_K - I_L I_K + R_L^2 \frac{I_K}{I_L} \quad (4d)$$

Bei kleinen Verschiebungswerten l gilt

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} (l+d) \left[1 - \frac{W_L^2}{1 - (1 - W_L^2) \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} (l+d)} \right] \approx \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} (l+d) \quad (4e)$$

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_e = W_L \frac{1}{1 - (1 - W_L^2) \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} (l+d)} \approx W_L \quad (4f)$$

Wird $l+d < \lambda/20$, so gilt bei kleinem W_L

$$\varepsilon = 1 + \frac{l}{d} \quad (4g)$$

5. Papiermessungen

Ist $l+d < \lambda/20\pi$ und $W_L < 0,7$, so gilt

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_e = \frac{120\pi}{F} = W_L \quad (5a)$$

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{l}{d} \right) (1 - W_L^2) \quad (5b)$$

Ist $l'+d < \lambda/20\pi$ (l' wird gemessen, wenn die Probe durch Kurzschluß ersetzt wird und ist umgekehrt wie l gerichtet), so gilt

$$\frac{F}{120\pi} = W_L \left[1 + \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{l'+d}{W_L} \right)^2 \right] \quad (5c)$$

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{l'}{d} \right) \frac{1/W_L^2 - 1}{1 + \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{l'+d}{\lambda} \right)^2} \quad (5d)$$

In allen anderen Fällen werden die Beziehungen (4a) und (4b) verwandt. Allgemein gilt ferner

$$\operatorname{tg} \vartheta_s = \frac{2 W_L}{(1 - W_L^2) \sin \frac{4\pi}{\lambda} (l + d)} = \frac{2 W_L}{(1 - W_L^2) \sin \frac{4\pi}{\lambda} (l' + d)}. \quad (5e)$$

6. Nichtleitende Proben

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} (l + d) \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} (l + d) \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} (k + d)}}{\sqrt{\operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} (l + d) \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} (k + d)}}. \quad (6a)$$

Für $\mu = 1$ gilt

$$\sqrt{\varepsilon} \operatorname{tg} \frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{\varepsilon} = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} (l + d). \quad (6b)$$

Für $l + d < \lambda/10$ und $k + d < \lambda/10$ gilt

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{l}{d}\right) \left[1 + \frac{13,2}{\lambda^2} (l + d) (l - k)\right]. \quad (6c)$$

7. Verfahren für dünne Proben, die nach den Formeln (4) ungenau gemessen werden:

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{l}{d}\right) \left[1 + \frac{13,2}{\lambda^2} (l + d) (l - k) - \frac{1}{3} A_L^2 \frac{l - k}{l + d} - \frac{2}{3} A_L (A_L - A_K)\right], \quad (7a)$$

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_s =$$

$$A_L \left[1 - \frac{A_K}{3} (A_L - A_K) + \frac{13,2}{\lambda^2} \left\{ (l + d)^2 \frac{A_L - A_K}{A_L} + 2 (l + d) (l - k) \right\}\right]. \quad (7b)$$

Darin ist $A_L = \operatorname{ArTg} W_L$ und $A_K = \operatorname{ArTg} W_K$. Der Fehler der Gleichungen in relativem Maße ist beschränkt durch die Beziehungen:

$$\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} < m + \frac{\lambda}{2\pi} \frac{A_L}{l + d} n \quad (7c)$$

$$\frac{\Delta (\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_s)}{\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_s} < m + \frac{2\pi}{l} \frac{l + d}{A_L} n, \quad (7d)$$

worin

$$m = 0,04 \left[\frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2} \right]^2 + \frac{0,15}{v^2 w^2} \quad (7e)$$

mit

$$n = \frac{0,15}{v w} \left[\frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2} \right] \quad (7f)$$

ist.

$$\frac{l + d}{k + d} < \frac{\lambda}{10 v}, \quad \frac{A_L}{A_K} < \frac{10 w}{2\pi} \quad (7g)$$

Die vorliegenden drei Arbeiten wurden in den letzten Kriegsjahren begonnen und 1946 abgeschlossen. Herrn Professor Rajewsky sei an dieser Stelle für die Anregung hierzu, sein förderndes Interesse, sowie die tatkräftige Unterstützung, besonders durch die großzügige Überlassung der Institutsmittel, herzlichst gedankt.

Frankfurt a. M., Kaiser-Wilhelm-Institut für Biophysik.

(Bei der Redaktion eingegangen am 9. Juni 1949.)

**Analytische und graphische Methoden zur Lösung
optischer Interferenzprobleme bei dünnen Schichten**

Von Hubert Pohlack

(Mit 10 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Nach formaler Beschreibung der Interferenzerscheinungen in dünnen, durchsichtigen, homogenen Schichten wird die Reflexionsformel für Systeme aus einer beliebigen Anzahl solcher Schichten abgeleitet. Durch Zusammenfassung der wellenoptischen Daten zu Matrizen wird dabei eine wesentliche Vereinfachung, sowohl für die allgemeine Lösung, als auch für den speziellen Rechengang erzielt. Eine Reihe von Beispielen zeigt die schematische Anwendung der Matrizenrechnung auf praktische Probleme der „Optik dünner Schichten“. Es folgt die Beschreibung eines graphischen Verfahrens, mit dessen Hilfe einfache und übersichtliche Näherungslösungen gefunden werden können. Die Brauchbarkeit der Methoden wird beurteilt und die Möglichkeit erörtert, beide Verfahren in der Praxis miteinander zu verbinden.

I. Einleitung

Reflexionsminderung an optischen Gläsern, Steigerung der Metallreflexion, optische Strahlenteilung sowie verlustarme Lichtfilterung können bekanntlich mit dünnen, durchsichtigen Schichten erzielt werden, wobei die gewünschten Wirkungen auf die gleiche physikalische Ursache der Lichtinterferenz zurückzuführen sind. Es liegt daher nahe, diese in der bisherigen Literatur meist speziell behandelten Probleme allgemein zu betrachten, um hieraus gemeinsame Methoden für numerische Lösungen und für die Errechnung geeigneter Konstruktionsdaten zu gewinnen.

Einen neuartigen und praktisch gangbaren Weg zu solchen allgemeinen Lösungen deutet K. Schuster in einer kürzlich erschienenen Arbeit¹⁾ an, indem er Beziehungen der in der Elektrotechnik gebräuchlichen Vierpoltheorie auf die Wellenoptik dünner Schichten überträgt. Schuster weist darauf hin, daß diese formale Angleichung zu neuen Gesichtspunkten führen kann und macht auch bereits an einem Beispiel auf funktionelle Zusammenhänge aufmerksam, die in der bisher üblichen mathematischen Behandlung des Problems nicht zum Ausdruck kamen.

Von diesen Überlegungen ausgehend, soll hier zunächst die für den allgemeinsten Fall gültige Reflexionsformel hergeleitet werden, welche mit Einführung von Koeffizientenmatrizen und bei Benutzung der für diese gültigen Rechenregeln in

¹⁾ K. Schuster, Anwendung der Vierpoltheorie auf die Probleme der optischen Reflexionsminderung, Reflexionsverstärkung und der Interferenzfilter. Ann. Physik (6) 4, 352 (1949).

sehr einfacher Fassung geschrieben werden kann. Dem Vorteil der durch ein solches stark schematisierendes Verfahren erreichten Vereinfachung und formalen Allgemeingültigkeit steht allerdings auf der anderen Seite der Nachteil eines fast völligen Verzichtes auf Anschaulichkeit gegenüber. Als Ausgleich für diesen Mangel kann die in Abschnitt III hergeleitete geometrische Näherungsmethode angewendet werden: Wie gezeigt wird, besteht nämlich in zahlreichen Fällen die Möglichkeit, beide Verfahren — das formal-analytische² und das anschaulich-geometrische — in geeigneter Weise so miteinander zu verknüpfen, daß eine einheitliche und relativ einfache Behandlung des Reflexionsproblems für beliebige Schichtsysteme erreicht wird.

Hierzu sei vorerst der den Interferenzerscheinungen dünner Schichten gemeinsame physikalische Tatbestand herausgestellt und unter Anlehnung an die Betrachtungsweise K. Schusters wie folgt formuliert:

Eine linear polarisierte ebene Lichtwelle der Wellenlänge λ_0 breite sich aus in einem unendlich ausgedehnten Medium der Brechzahl n_0 . Die Wellenfläche erstreckte sich parallel zur yz -Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems, die Fortpflanzungsrichtung sei die der positiven x -Achse; über die Lage des Nullpunktes wird nichts vorausgesetzt. Dann ist das elektromagnetische Feld in jedem Raumpunkt charakterisiert durch die beiden Feldvektoren $\mathfrak{E}^{(0)}$ und $\mathfrak{H}^{(0)}$, und es gilt mit der Festsetzung, daß der elektrische Vektor in die y -Richtung fällt:

$$|\mathfrak{E}^{(0)}| = E_y^{(0)}$$

$$|\mathfrak{H}^{(0)}| = H_z^{(0)}.$$

Und da aus den Maxwell'schen Gleichungen folgt:

$$\mathfrak{H}^{(0)} = n_0 (e_1 \times \mathfrak{E}^{(0)}),$$

worin e_1 den Einheitsvektor der x -Achse (Fortpflanzungsrichtung) bedeutet, wird auch:

$$H_z^{(0)} = n_0 E_y^{(0)}.$$

Zur Charakterisierung des Feldes in einem Raumpunkt (x_0, y, z) des Mediums 0 kann also mit der zeitgrößenfreien komplexen Amplitude \mathfrak{A}_0 geschrieben werden:

$$E_y^{(0)} = \mathfrak{A}_0 e^{-jk_0 x_0} \quad (1)$$

$$H_z^{(0)} = n_0 \mathfrak{A}_0 e^{-jk_0 x_0} \quad (2)$$

mit der Wellenzahl $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$.

Bringt man im Medium 0 ein System dünner, planparalleler, homogener, durchsichtiger Schichten 1, ..., n an mit den Brechzahlen n_1, \dots, n_n und schließt dieses System ab durch ein unendlich ausgedehntes Medium $n+1$ mit der Brechzahl n_{n+1} , so wird die Lichtwelle beim Auftreffen auf die Grenzflächen „aufgespalten“ in durchgehendes und reflektiertes Licht. Wir sehen von dem „Anlaufvorgang“, der uns hier nicht interessiert, ab und betrachten den „stationären Zustand“. Die Anzahl der Aufspaltungen und damit die Anzahl der sich überlagernden Einzelwellen ist unbegrenzt. Mit Summierung der diskreten Feldvektoren in jedem Raumpunkt (unendliche Reihen mit abnehmenden Gliedern! vgl. u. a.²) und ³)

²) K. Hammer, Die optischen Eigenschaften teildurchlässiger Spiegel aus nicht-metallischen Stoffen. Z. techn. Physik **24**, 169 (1943).

³) L. Hiesinger, Entspiegelung von Glasoberflächen. Optik **3**, 485 (1948).

kann nun in den Medien $0, 1, \dots, n$ je eine Überlagerungswelle in der positiven und in der negativen x -Richtung unterschieden werden, deren komplexe Amplituden im folgenden mit \mathfrak{A}_m und \mathfrak{A}'_m bezeichnet seien, so daß unter der vereinfachenden Voraussetzung, daß das Schichtsystem senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung angeordnet ist, für einen festen Raumpunkt im Medium m angesetzt werden kann:

$$\left. \begin{aligned} E_y^{(m)} &= \mathfrak{A}_m + \mathfrak{A}'_m \\ \mathfrak{S}^{(m)} &= n_m (c_1 \times \mathfrak{A}_m) + n_m (-c_1 \times \mathfrak{A}'_m) \\ H_z^{(m)} &= n_m (\mathfrak{A}_m - \mathfrak{A}'_m) \end{aligned} \right\} 0 \leq m \leq n. \quad (3)$$

$$(4)$$

Die Wahl dieses Raumpunktes steht zunächst frei. Wir vereinbaren, daß die Gl. (3) (4) gelten sollen für die der Lichtquelle zugekehrten „Anfangsflächen“ der Medien $1, \dots, n$, bzw. für die „Endfläche“ des Mediums 0. Unter Verwendung

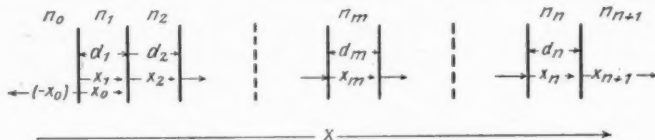


Abb. 1. Optisches System von n Schichten

der durch Abb. 1 festgelegten Ortsveränderlichen gilt dann für einen beliebigen Punkt in den Medien $0, 1, \dots, n$:

$$E_m = \mathfrak{A}_m e^{-jk_m x_m} + \mathfrak{A}'_m e^{+jk_m x_m} \quad (5^4)$$

$$H_m = n_m (\mathfrak{A}_m e^{-jk_m x_m} - \mathfrak{A}'_m e^{+jk_m x_m}) \quad (6^4)$$

worin die x_m also Veränderliche sind:

$$0 \leq x_m \leq d_m \quad \text{bzw.} \quad -\infty \leq x_0 \leq 0;$$

und im unendlich ausgedehnten Medium $n+1$ erhält man die einfach fortschreitende Welle:

$$E_{n+1} = \mathfrak{A}_{n+1} e^{-jk_{n+1} x_{n+1}} \quad (7^4)$$

$$H_{n+1} = n_{n+1} \mathfrak{A}_{n+1} e^{-jk_{n+1} x_{n+1}} \quad (8^4)$$

mit $k_m = \frac{2\pi}{\lambda_m} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_m$ ($0 \leq m \leq n+1$).

Unter Anwendung des Satzes von der Stetigkeit der Tangentialkomponenten der Feldstärken in einer Grenzfläche zweier Medien ist dann also für die Grenzflächen selbst zu setzen:

$$E_{0/1} = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}'_0 = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}'_1 \quad (9^5)$$

$$H_{0/1} = n_0 (\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}'_0) = n_1 (\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}'_1) \quad (10^5)$$

$$\begin{aligned} E_{(m-1)/m} &= \mathfrak{A}_{m-1} e^{-jk_{m-1} d_{m-1}} + \mathfrak{A}'_{m-1} e^{+jk_{m-1} d_{m-1}} \\ &= \mathfrak{A}_m + \mathfrak{A}'_m \end{aligned} \quad (11^5)$$

$$\begin{aligned} H_{(m-1)/m} &= n_{m-1} (\mathfrak{A}_{m-1} e^{-jk_{m-1} d_{m-1}} - \mathfrak{A}'_{m-1} e^{+jk_{m-1} d_{m-1}}) \\ &= n_m (\mathfrak{A}_m - \mathfrak{A}'_m) \end{aligned} \quad (12^5)$$

⁴⁾ Die Indices y und z sind hier und im folgenden fortgelassen.

⁵⁾ Die Indices $0/1, \dots, (m-1)/m, \dots$ sollen die Grenzflächen andeuten.

mit $2 \leq m \leq n$ und:

$$\begin{aligned} E_{n/(n+1)} &= \mathfrak{A}_n e^{-jk_n d_n} + \mathfrak{A}'_n e^{+jk_n d_n} \\ &= \mathfrak{A}_{n+1} \end{aligned} \quad (13)^*)$$

$$\begin{aligned} H_{n/(n+1)} &= n_n (\mathfrak{A}_n e^{-jk_n d_n} - \mathfrak{A}'_n e^{+jk_n d_n}) \\ &= n_{n+1} \mathfrak{A}_{n+1}. \end{aligned} \quad (14)^*)$$

Hier zunächst noch ein Hinweis auf die zur Vereinfachung des allgemeinen physikalischen Tatbestandes bisher eingeführten speziellen Annahmen:

Es wurden vorausgesetzt:

1. linear polarisiertes Licht,
2. eine ebene Wellenfront,
3. senkrechtes Auftreffen der Lichtwelle auf das Schichtsystem,
4. die das Schichtsystem einschließenden Medien wurden als einseitig unbegrenzt angenommen.

Inwieweit diese Voraussetzungen in den praktisch interessierenden Fällen berechtigt sind, soll hier im einzelnen nicht untersucht werden. Es sei lediglich bemerkt, daß Annahme 1 für senkrecht einfallendes Licht und isotrope Medien keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet, während 2, 3 und 4 eine Annäherung an die praktischen Verhältnisse darstellen.

II. Analytische Lösungsmethoden

1. Herleitung

Für die folgenden Überlegungen setzen wir voraus:

Die Feldvektoren zweier Raumpunkte sind linear voneinander abhängig⁶⁾. Wir können also schreiben:

$$E_{(m-1)/m} = \mathfrak{A}_{11}^{(m)} \cdot E_{m/(m+1)} + \mathfrak{A}_{12}^{(m)} \cdot H_{m/(m+1)} \quad (15)^*)$$

$$H_{(m-1)/m} = \mathfrak{A}_{21}^{(m)} \cdot E_{m/(m+1)} + \mathfrak{A}_{22}^{(m)} \cdot H_{m/(m+1)}. \quad (16)^*)$$

Dieses Gleichungspaar kann als Matrixgleichung wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{vmatrix} E_{(m-1)/m} & 0 \\ H_{(m-1)/m} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_{11}^{(m)} & \mathfrak{A}_{12}^{(m)} \\ \mathfrak{A}_{21}^{(m)} & \mathfrak{A}_{22}^{(m)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} E_{m/(m+1)} & 0 \\ H_{m/(m+1)} & 0 \end{vmatrix}. \quad (17)$$

Für ein System von n Schichten erhält man dann n Gleichungspaare in der Form der Gl. (15) (16) bzw. n Matrixgleichungen gemäß (17).

Interessieren die Beziehungen lediglich der ersten und der letzten Grenzfläche zueinander, so können die E und H der Zwischenflächen eliminiert werden, da in jedem Gleichungspaar (15) (16) die unabhängig Veränderlichen identisch sind mit den abhängig Veränderlichen des nächsten Gleichungspaares. In der Matrizenrechnung vereinfacht sich dies zur formalen Multiplikation der Koeffizientenmatrizen:

$$\begin{vmatrix} E_{0/1} & 0 \\ H_{0/1} & 0 \end{vmatrix} = \|\mathfrak{A}^{(1)}\| \cdot \|\mathfrak{A}^{(2)}\| \cdots \|\mathfrak{A}^{(n)}\| = \begin{vmatrix} E_{n/(n+1)} & 0 \\ H_{n/(n+1)} & 0 \end{vmatrix}. \quad (18)$$

⁶⁾ Der Beweis kann leicht mit Hilfe der Gl. (9) bis (14) geführt werden.

⁷⁾ Hiermit ist die formale Beziehung zur elektrotechnischen Vierpoltheorie hergestellt (vgl. ¹⁾ und u. a. ⁸⁾).

⁸⁾ R. Feldtkeller, Einführung in die Vierpoltheorie der elektrischen Nachrichtentechnik. Leipzig, S. Hirzel, 3. Aufl. 1943.

Und mit $\|\mathfrak{R}^{(1)}\| \cdot \|\mathfrak{R}^{(2)}\| \cdots \|\mathfrak{R}^{(n)}\| = \|\mathfrak{R}\|$ wird:

$$E_{0/1} = \mathfrak{R}_{11} \cdot E_{n/(n+1)} + \mathfrak{R}_{12} \cdot H_{n/(n+1)} \quad (19)$$

$$H_{0/1} = \mathfrak{R}_{21} \cdot E_{n/(n+1)} + \mathfrak{R}_{22} \cdot H_{n/(n+1)}. \quad (20)$$

Bildet man aus Gl. (19) und (20) den Quotienten und dividiert rechts Zähler und Nenner durch $H_{n/(n+1)}$, so erhält man:

$$\frac{E_{0/1}}{H_{0/1}} = \frac{\mathfrak{R}_{11} \frac{E_{n/(n+1)}}{H_{n/(n+1)}} + \mathfrak{R}_{12}}{\mathfrak{R}_{21} \frac{E_{n/(n+1)}}{H_{n/(n+1)}} + \mathfrak{R}_{22}} \quad (21)$$

und unter Anwendung der Gl. (9) (10) und (13) (14):

$$\frac{\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}'_0}{n_0 (\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}'_0)} = \frac{\mathfrak{R}_{11} \frac{1}{n_{n+1}} + \mathfrak{R}_{12}}{\mathfrak{R}_{21} \frac{1}{n_{n+1}} + \mathfrak{R}_{22}}, \quad (22)$$

woraus sich nach einfacher Umformung ergibt:

$$\frac{\mathfrak{A}'_0}{\mathfrak{A}_0} = \frac{\frac{n_0}{n_{n+1}} \mathfrak{R}_{11} + n_0 \mathfrak{R}_{12} - \frac{1}{n_{n+1}} \mathfrak{R}_{21} - \mathfrak{R}_{22}}{\frac{n_0}{n_{n+1}} \mathfrak{R}_{11} + n_0 \mathfrak{R}_{12} + \frac{1}{n_{n+1}} \mathfrak{R}_{21} + \mathfrak{R}_{22}} = \mathfrak{R}. \quad (23)$$

Dieser Quotient stellt als „komplexes Amplitudenreflexionsvermögen“ \mathfrak{R} einer beliebigen Folge dünner Schichten zwischen zwei ausgedehnten Medien das Verhältnis dar der „rücklaufenden“ zur „hinlaufenden“ elektrischen Amplitude im vorgelagerten Medium; und man erhält für das entsprechende Verhältnis der Lichtintensitäten als „Intensitätsreflexionsvermögen“ des gesamten Systems:

$$R = \frac{\mathfrak{A}'_0 \cdot n_0 \mathfrak{A}'_0}{\mathfrak{A}_0 \cdot n_0 \mathfrak{A}_0} = \left(\frac{\mathfrak{A}'_0}{\mathfrak{A}_0} \right)^2 = |\mathfrak{R}|^2. \quad (24)$$

Mit Gl. (23) (24) haben wir Beziehungen für reflektiertes Licht gewonnen, welche auf sämtliche Probleme der Optik dünner Schichten anwendbar sind und uns gestatten, die speziellen Ergebnisse zu diskutieren.

Die Identifizierung der Matricelemente \mathfrak{R}_{ik} mit den optisch-numerischen Daten eines Schichtsystems soll in den folgenden Abschnitten an Hand von praktischen Beispielen durchgeführt werden.

2. Anwendung auf die Reflexion an einer einfachen Trennfläche

Im Sinne der allgemeinen Behandlung des Reflexionsproblems ist es angebracht, die einfache Trennfläche zwischen zwei ausgedehnten Medien der Brechzahlen n_0 und n_1 in die Betrachtung mit einzubeziehen, indem man diesen Fall formal auf faßt als Einfachschicht mit der Schichtdicke $d = 0$. Man erhält dann mit:

$$E_{0/1} = E_{0/1}$$

$$H_{0/1} = H_{0/1} = n_1 E_{0/1}$$

die Koeffizientenmatrix:

$$\|\mathfrak{R}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ n_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Und es ergibt sich aus Gl. (23) als komplexes Amplitudenreflexionsvermögen sofort:

$$\mathfrak{R} = \frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1} \quad (25)$$

und als Intensitätsreflexionsvermögen:

$$R = |\mathfrak{R}|^2 = \left(\frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1} \right)^2. \quad (26)$$

Dies ist die Fresnelsche Reflexionsformel für senkrecht einfallendes Licht.

3. Anwendung auf die Reflexionsminderung (Entspiegelung)

Für den Fall einer einfachen dünnen homogenen Schicht mit der Brechzahl n_1 , eingebettet in ausgedehnte Medien mit den Brechzahlen n_0 und n_2 , gilt gem. Gl. (9) bis (12):

$$E_{0/1} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_1 \quad (9a)$$

$$H_{0/1} = n_1 (\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_1') \quad (10a)$$

$$E_{1/2} = \mathfrak{A}_1 e^{-jk_1 d_1} + \mathfrak{A}_1' e^{+jk_1 d_1} \quad (11a)$$

$$H_{1/2} = n_1 (\mathfrak{A}_1 e^{-jk_1 d_1} - \mathfrak{A}_1' e^{+jk_1 d_1}). \quad (12a)$$

Also aus Gl. (11a) (12a):

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{2n_1} e^{+jk_1 d_1} (n_1 E_{1/2} + H_{1/2})$$

$$\mathfrak{A}_1' = \frac{1}{2n_1} e^{-jk_1 d_1} (n_1 E_{1/2} - H_{1/2}).$$

Und unter Einsetzen in Gl. (9a) (10a):

$$\begin{aligned} E_{0/1} &= \frac{1}{2} (e^{+jk_1 d_1} + e^{-jk_1 d_1}) E_{1/2} + \frac{1}{2n_1} (e^{+jk_1 d_1} - e^{-jk_1 d_1}) H_{1/2} \\ &= (\cos k_1 d_1) E_{1/2} + \frac{1}{n_1} j (\sin k_1 d_1) H_{1/2} \end{aligned} \quad (9b)$$

$$\begin{aligned} H_{0/1} &= \frac{n_1}{2} (e^{+jk_1 d_1} - e^{-jk_1 d_1}) E_{1/2} + \frac{1}{2} (e^{+jk_1 d_1} + e^{-jk_1 d_1}) H_{1/2} \\ &= n_1 j (\sin k_1 d_1) E_{1/2} + (\cos k_1 d_1) H_{1/2} \end{aligned} \quad (10b)$$

mit der Koeffizientenmatrix:

$$\|\mathfrak{R}_{(1)}\| = \begin{vmatrix} \cos k_1 d_1 & j \frac{1}{n_1} \sin k_1 d_1 \\ j n_1 \sin k_1 d_1 & \cos k_1 d_1 \end{vmatrix}.$$

Und man erhält mit Gl. (23):

$$\mathfrak{R} = \frac{n_1 (n_0 - n_2) \cos k_1 d_1 + j (n_0 n_2 - n_1^2) \sin k_1 d_1}{n_1 (n_0 + n_2) \cos k_1 d_1 + j (n_0 n_2 + n_1^2) \sin k_1 d_1}. \quad (27)$$

Soll die Reflexion verschwinden, so muß der Zähler zu Null werden. Da eine komplexe Zahl dann und nur dann verschwindet, wenn Real- und Imaginärteil zugleich 0 werden, ist zu setzen:

$$\left. \begin{aligned} n_1 (n_0 - n_2) \cos k_1 d_1 &= 0 \\ (n_0 n_2 - n_1^2) \sin k_1 d_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ für } \mathfrak{R} = 0.$$

Und es folgt aus:

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad & \left\{ \begin{array}{l} \sin k_1 d_1 \\ \cos k_1 d_1 \end{array} \right\} \neq 0 : n_0 = n_1 = n_2 \\ 2. \quad & \sin k_1 d_1 = 0 \left\{ \begin{array}{l} d_1 = \frac{\lambda_1}{2}, \lambda_1, \frac{3}{2} \lambda_1, \dots \\ n_0 = n_2 \end{array} \right. \\ 3. \quad & \cos k_1 d_1 = 0 \left\{ \begin{array}{l} d_1 = \frac{\lambda_1}{4}, \frac{3}{4} \lambda_1, \dots \\ n_1 = \sqrt{n_0 n_2} \end{array} \right. \end{aligned} \right\} \text{ für } \Re = 0. \quad (28)$$

1. und 2. sind Triviale Fälle; 3. ist die bekannte Bedingung für verschwindende Reflexion an einer dünnen Einfachschicht.

Bei Abweichung von den optimalen Bedingungen (28) ist zur Errechnung der Restreflexion die Gl. (27) mit dem konjugiert komplexen Wert zu multiplizieren. Man erhält dann gemäß Gl. (24):

$$\begin{aligned} R = |\Re|^2 &= \frac{\{n_1(n_0 - n_2)\}^2 \cos^2 k_1 d_1 + (n_0 n_2 - n_1^2)^2 \sin^2 k_1 d_1}{\{n_1(n_0 + n_2)\}^2 \cos^2 k_1 d_1 + (n_0 n_2 + n_1^2)^2 \sin^2 k_1 d_1} \\ &= \frac{\{n_1(n_0 - n_2)\}^2 \operatorname{ctg}^2 k_1 d_1 + (n_0 n_2 - n_1^2)^2}{\{n_1(n_0 + n_2)\}^2 \operatorname{ctg}^2 k_1 d_1 + (n_0 n_2 + n_1^2)^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Gl. (29) ist identisch mit der in der Literatur häufig angegebenen Formel (vgl. u. a. ³⁾):

$$R = \frac{\left(\frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1}\right)^2 + \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 + 2 \left(\frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1}\right) \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right) \cos 2 k_1 d_1}{1 + \left(\frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1}\right)^2 + \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 + 2 \left(\frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1}\right) \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right) \cos 2 k_1 d_1}. \quad (29a)$$

Für eine Zweifachschicht ergibt sich die zweite Matrix, wie man sich leicht überzeugt, formal aus der ersten, indem in $\|\Re^{(1)}\|$ die Indices 1 durch 2 ersetzt werden:

$$\|\Re^{(2)}\| = \begin{vmatrix} \cos k_2 d_2 & j \frac{1}{n_2} \sin k_2 d_2 \\ j n_2 \sin k_2 d_2 & \cos k_2 d_2 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Also: } \|\Re\| = \|\Re^{(1)}\| \cdot \|\Re^{(2)}\| =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos k_1 d_1 \cos k_2 d_2 & j \left(\frac{1}{n_1} \sin k_1 d_1 \cos k_2 d_2 \right. \\ - \frac{n_2}{n_1} \sin k_1 d_1 \sin k_2 d_2 & \left. + \frac{1}{n_2} \cos k_1 d_1 \sin k_2 d_2 \right) \\ j (n_1 \sin k_1 d_1 \cos k_2 d_2 & \cos k_1 d_1 \cos k_2 d_2 \\ + n_2 \cos k_1 d_1 \sin k_2 d_2) & - \frac{n_1}{n_2} \sin k_1 d_1 \sin k_2 d_2 \end{vmatrix}.$$

Damit wird gemäß Gl. (23):

$$\begin{aligned} \Re = & \frac{n_1 n_2 (n_0 - n_3) \cos k_1 d_1 \cos k_2 d_2 + (n_1^2 n_3 - n_0 n_2^2) \sin k_1 d_1 \sin k_2 d_2 + \dots}{n_1 n_2 (n_0 + n_3) \cos k_1 d_1 \cos k_2 d_2 - (n_1^2 n_3 + n_0 n_2^2) \sin k_1 d_1 \sin k_2 d_2 + \dots} \\ & + j \{ (n_1 (n_0 n_2 - n_3^2) \cos k_1 d_1 \sin k_2 d_2 + n_2 (n_0 n_3 - n_1^2) \sin k_1 d_1 \cos k_2 d_2) \\ & + j \{ (n_1 (n_0 n_3 + n_2^2) \cos k_1 d_1 \sin k_2 d_2 + n_2 (n_0 n_3 + n_1^2) \sin k_1 d_1 \cos k_2 d_2) \}. \end{aligned} \quad (30)$$

Für $\Re = 0$ erhält man, wieder unter der Berücksichtigung, daß dann Real- und Imaginärteil des komplexen Zählers einzeln verschwinden müssen:

$$[\operatorname{tg} k_1 d_1 \cdot \operatorname{tg} k_2 d_2 = \frac{n_1 n_2 (n_3 - n_0)}{n_1^2 n_3 - n_0 n_2^2}] \quad (31a)$$

$$\frac{\operatorname{tg} k_1 d_1}{\operatorname{tg} k_2 d_2} = \frac{n_1 (n_2^2 - n_0 n_3)}{n_2 (n_0 n_3 - n_1^2)} \quad (31b)$$

Über Gl. (31a) (31b), die K. Schuster¹⁾ erstmals angibt, läßt sich zunächst folgendes aussagen:

Die Mannigfaltigkeit der Brechzahlkombinationen n_1, n_2 (bei vorgegebenen n_0, n_3) für vollständige Entspiegelung ist nicht ein- sondern zweidimensional; d. h.: zu jeder Brechzahl der einen Schicht läßt sich eine unendliche Anzahl verschiedener Brechzahlen für die andere Schicht finden, so daß $R = 0$ wird, wobei die Schichtdicken dann verschiedene Werte annehmen können.

Für die Praxis der Reflexionsminderung gewinnt man aber noch ein weiteres wertvolles Ergebnis, das jedoch hier nur angedeutet werden soll: Wie man leicht übersieht, besitzen wegen der unendlichen Vieldeutigkeit der Arkusfunktion die Gl. (31a) (31b) vielfache Lösungen. Es seien

$$\begin{aligned} k_1^{(1)} d_1^{(1)} &= \alpha_1 & \text{und} & & k_1^{(2)} d_1^{(2)} &= \alpha'_1 \\ k_2^{(1)} d_2^{(1)} &= \alpha_2 & & & k_2^{(2)} d_2^{(2)} &= \alpha'_2 \end{aligned}$$

zwei solcher Lösungspaare. Es kann nun sein, daß $\alpha_1 : \alpha'_1 = \alpha_2 : \alpha'_2$, also:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi n_1}{\lambda_a} d_1 &= \alpha_1 & \frac{2\pi n_1}{\lambda_b} d_1 &= \alpha'_1 \\ \frac{2\pi n_2}{\lambda_a} d_2 &= \alpha_2 & \frac{2\pi n_2}{\lambda_b} d_2 &= \alpha'_2. \end{aligned}$$

Und es wird dann:

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_b} = \frac{\alpha'_1}{\alpha_1} = \frac{\alpha'_2}{\alpha_2}.$$

Das heißt: Durch Wahl von Brechzahlen und Schichtdicken, die dieser speziellen Lösungsbedingung genügen, wird die Reflexion für die Wellenlängen λ_a und λ_b ausgelöscht. Für $\alpha' = \pi + \alpha$ ist diese Aussage trivial, da sie dann lediglich eine Formulierung der bekannten Periodizität des spektralen Reflexionsverlaufs bei $\alpha_1 = \alpha_2$ darstellt. Für Gl. (31a) (31b) sind jedoch wegen

$$\left. \begin{aligned} \arccos(+\operatorname{tg} \alpha) &= \alpha, \pi + \alpha, \dots \\ \arccos(-\operatorname{tg} \alpha) &= \pi - \alpha, 2\pi - \alpha, \dots \end{aligned} \right\} \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

auch Lösungspaare vorhanden, für welche gilt:

$$\alpha_1 : (\pi - \alpha_1) = \alpha_2 : (2\pi - \alpha_2), \text{ also } \alpha_2 = 2\alpha_1.$$

Hieraus ergibt sich die bedeutsame Folgerung, daß Wellenlängen λ_a und λ_b mit verschwindender Reflexion bestimmt werden können, die nicht durch ein Reflexions-Hauptmaximum voneinander getrennt sind. Bei geeignet gewählter Lage dieser Wellenlängen (z. B. im kurz- und im langwelligen Teil des sichtbaren Spektrums) kann man dann eine äußerst geringe Reflexion über einen breiten Spektralbereich hinweg erhalten. Zur übersichtlichen Bestimmung von realisierbaren Brechzahlen, welche diese Forderung erfüllen, sei auf die geometrische Methode Abschnitt III verwiesen (s. auch: Abb. 10a).

Gl. (31a) (31b) stellen somit eine wesentliche Verallgemeinerung dar gegenüber den in der bisherigen Literatur angegebenen Abhängigkeitsbedingungen der n_1 , n_2 -Werte, wobei meist speziell

$$k_1 d_1 = k_2 d_2 = \frac{\pi}{2}$$

gesetzt, wird und die dann lautet:

$$\frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{n_3}{n_0}} \quad (32)$$

Zur Errechnung der Reflexion für beliebige Brechzahlen, Schichtdicken und Wellenlängen kann dann für das Intensitäts-Reflexionsvermögen geschrieben werden:

$$R = \frac{\{n_1 n_2 (n_0 - n_3) \operatorname{ctg} k_1 d_1 \cdot \operatorname{ctg} k_2 d_2 + (n_1^2 n_3 - n_0 n_2^2)\}^2 + \dots}{\{n_1 n_2 (n_0 + n_3) \operatorname{ctg} k_1 d_1 \cdot \operatorname{ctg} k_2 d_2 - (n_1^2 n_3 + n_0 n_2^2)\}^2 + \dots} + \frac{\{n_1 (n_0 n_3 - n_2^2) \operatorname{ctg} k_1 d_1 + n_2 (n_0 n_3 - n_1^2) \operatorname{ctg} k_2 d_2\}^2}{\{n_1 (n_0 n_3 + n_2^2) \operatorname{ctg} k_1 d_1 + n_2 (n_0 n_3 + n_1^2) \operatorname{ctg} k_2 d_2\}^2} \quad (33)^*)$$

Für Drei- und Mehrfachschichten bildet die Aufstellung der Matrizen keine zusätzliche Komplizierung; die Errechnung des Reflexionsvermögens für allgemeine Argumente $k_m d_m$ wird aber bereits erheblich umständlich. Die Erfahrung zeigt jedoch, daß man durch Beschränkung auf spezielle Werte (z. B. $nd = \frac{\lambda}{4}$, $\frac{\lambda}{2}$ usw.) u. U. eine wesentliche Vereinfachung der Matrixelemente erreicht, ohne daß dabei für die Belange der Reflexionsminderung der Verzicht auf Allgemeinheit fühlbar wird.

4. Anwendung auf absorptionsfreie Spektralfilter und Teilungsschichten

Die Errechnung der reflektierten (bzw. durchgelassenen) Lichtintensität für Spektralfilter und Elemente zur Strahlenteilung, deren Wirkungen auf dem Prinzip der Lichtinterferenz dünner dielektrischer Schichten beruhen, erfolgt für den allgemeinen Fall auf dem gleichen Weg, wie im vorigen Abschnitt angegeben (vgl. auch: ¹⁰⁾, ¹¹⁾). Auch hier bedeutet wieder die Auswahl spezieller, die Formeln vereinfachender Werte eine oftmals tragbare Einschränkung der Allgemeinheit.

Wir wollen hier die Eigenschaften eines Schichtsystems diskutieren, welches aus einer Folge gleicher Schichtpaare (n_1 , n_2) gebildet wird. Im Falle von $\frac{\lambda}{4}$ -Schichten erhalten wir für 1 solches Schichtpaar:

$$\begin{vmatrix} 0 & j \frac{1}{n_1} \\ j n_1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & j \frac{1}{n_2} \\ j n_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{n_2}{n_1} & 0 \\ 0 & -\frac{n_1}{n_2} \end{vmatrix}$$

und für 2 Paare:

$$\begin{vmatrix} -\frac{n_2}{n_1} & 0 \\ 0 & -\frac{n_1}{n_2} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \end{vmatrix}$$

⁹⁾ Es ist zweckmäßig, die Gleichung jeweils in die für den speziellen Fall geeignete Fassung umzuformen.

¹⁰⁾ C. H. Cartwright u. A. F. Turner, Multilayer films of high reflecting power. *Physic. Rev.* (2) 55, 1128 (1939).

¹¹⁾ R. Meßner, Die Bedeutung der Interferenz für die Herstellung verlustfreier Strahlenteilungen in optischen Geräten. *Zeiss Nachr.* 4, 253 (1943).

Allgemein für m Paare:

$$\begin{vmatrix} -\frac{n_2}{n_1} & 0 \\ 0 & -\frac{n_1}{n_2} \end{vmatrix}^m = \begin{vmatrix} (-1)^m \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^m & 0 \\ 0 & (-1)^m \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^m \end{vmatrix}.$$

Und hieraus gemäß Gl. (23):

$$\Re = \frac{(-1)^m \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^m - (-1)^m \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^m}{(-1)^m \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^m + (-1)^m \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^m} = \frac{\frac{n_2}{n_1} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^m - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^m}{\frac{n_2}{n_1} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^m + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^m}. \quad (34)$$

Für verschwindende Reflexion muß gesetzt werden:

$$\frac{n_2}{n_1} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^m = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^m, \text{ also: } \frac{n_2}{n_1} = \sqrt[m]{\frac{n_1}{n_2}}.$$

Vollständige Reflexion ist gegeben mit:

$$\Re = \frac{\frac{n_2}{n_1} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^m - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^m}{\frac{n_2}{n_1} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^m + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^m} = \pm 1,$$

also mit: $+\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^m = -\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^m$ oder: $+\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^m = -\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^m$.

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn $n_1 \neq n_2$ und $\lim m = \infty$; man sieht aber sofort, daß die Folge der \Re_m um so stärker gegen 1 konvergiert, je größer der numerische Unterschied der beiden Schichtbrechzahlen n_1 und n_2 ist¹³⁾.

Zur Errechnung des spektralen Verlaufs haben wir zu setzen für 1 Schichtpaar:

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & j \frac{1}{n_1} \sin \alpha \\ j n_1 \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \alpha & j \frac{1}{n_2} \sin \alpha \\ j n_2 \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \frac{n_2}{n_1} \operatorname{tg}^2 \alpha & j \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \operatorname{tg} \alpha \\ j (n_1 + n_2) \operatorname{tg} \alpha & 1 - \frac{n_1}{n_2} \operatorname{tg}^2 \alpha \end{vmatrix} = \|\Re\|,$$

worin $\alpha = k_1 d_1 = k_2 d_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0^{(2)}} \cdot \frac{\lambda_0}{4}$, und für m Schichtpaare:

$$\|\Re\|^m \quad (35).$$

5. Anwendung auf Medien mit merklicher Absorption

Die abgeleiteten Beziehungen wurden bisher nur auf dielektrische Medien angewendet, in denen die Dämpfung der Wellenausbreitung = 0 ist. Bei Einbeziehung von merklich absorbierenden Medien ist daher die Dämpfung zu berücksichtigen. Dies geschieht formal, indem der komplexe Brechungsindex $n = n(1 - j\kappa)$ und die komplexe Wellenzahl $k = k(1 - j\kappa)$ an Stelle der reellen Größen eingesetzt werden (vgl. ²⁾, ¹⁴⁾).

¹³⁾ Cartwright und Turner haben die Eigenschaften solcher Schichtsysteme mit abwechselnd hohem und niedrigem Brechungsindex untersucht¹⁰⁾. Unter Einsetzen der von ihnen angegebenen Schichtbrechzahlen 3,0 und 1,3 errechnet sich dann für $n_s = 1,0$ und $n_{\text{Glas}} = 1,5$ bereits bei drei Schichtpaaren eine Reflexion von $\approx 98\%$ (ohne Berücksichtigung der Absorption). Die spektral steil abfallende Reflexion wurde von C. und T. zur Herstellung von Monochromatoren benutzt.

¹⁴⁾ Für praktische Rechnungen ist es zweckmäßig, vor dem Potenzieren die Zahlenwerte für die Matrixelemente einzusetzen.

¹⁵⁾ R. Meßner, Die Bedeutung der Interferenz für die Steigerung der Metall-Reflexion und ihre praktische Verwertung in der Optik. Optik 2, 228 (1947).

Für eine einfache Metalloberfläche gilt wieder die Koeffizientenmatrix (vgl. Abschnitt II, 2):

$$\| \mathfrak{R} \| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Hiermit wird die reflektierte Amplitude (Gl. (23)):

$$\mathfrak{R} = \frac{\frac{n_0}{n_1(1-j\kappa)} - 1}{\frac{n_0}{n_1(1-j\kappa)} + 1} = \frac{(n_0 - n_1) + j\kappa n_1}{(n_0 + n_1) - j\kappa n_1} \quad (35)$$

und die reflektierte Intensität:

$$R = \frac{(n_0 - n_1)^2 + \kappa^2 n_1^2}{(n_0 + n_1)^2 + \kappa^2 n_1^2} \quad (36)$$

Am Beispiel eines mit zwei $\frac{\lambda}{4}$ -Schichten „vergüteten“ Metallspiegels wird die durch Anwendung der Matrizenrechnung erzielte Vereinfachung besonders bemerkbar: Gemäß Abschnitt II, 3 erhält man für die beiden $\frac{\lambda}{4}$ -Schichten die Matrizen:

$$\| \mathfrak{R}^{(1)} \| \cdot \| \mathfrak{R}^{(2)} \| = \begin{vmatrix} 0 & j\frac{1}{n_1} \\ jn_1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & j\frac{1}{n_2} \\ jn_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{n_2}{n_1} & 0 \\ 0 & -\frac{n_1}{n_2} \end{vmatrix}.$$

Und hieraus mit Gl. (23) und (24):

$$\mathfrak{R} = \frac{(n_0 n_2^2 - n_1^2 n_2) + j(n_1^2 n_2 \kappa)}{(n_0 n_2^2 + n_1^2 n_2) - j(n_1^2 n_2 \kappa)} \quad (37)$$

$$R = \frac{(n_0 n_2^2 - n_1^2 n_2)^2 + (n_1^2 n_2 \kappa)^2}{(n_0 n_2^2 + n_1^2 n_2)^2 + (n_1^2 n_2 \kappa)^2} \quad (38)$$

Zur Errechnung des spektralen Reflexionsverlaufs kann Gl. (30) herangezogen werden, worin dann der reelle Brechungsexponent n_2 durch den komplexen $n_2(1-j\kappa)$ ersetzt werden muß.

Bei absorbierenden Schichten geht man wie folgt vor: Durch Einsetzen der komplexen Größen in die entsprechenden Matrizen (Abschnitt II, 3) erhält man zunächst trigonometrische Funktionen mit komplexen Argumenten; diese sind dann nach den bekannten Formeln durch trigonometrische und hyperbolische Funktionen mit reellen Argumenten zu ersetzen. Es ergeben sich dadurch zwar größere Glieder, die Aufgabe bleibt jedoch auf dem bisherigen Weg prinzipiell lösbar.

6. Zusammenfassung und Beurteilung des Bisherigen

Wie gezeigt wurde, lassen sich bei Anwendung der bisher abgeleiteten Formeln die in der Einleitung aufgezählten praktischen Interferenzprobleme in jedem einzelnen Fall numerisch erfassen. Das Verfahren ist in erster Linie geeignet, das Reflexionsvermögen eines vorgegebenen Schichtsystems zu bestimmen, wobei die Rechnungen für spezielle optische Daten besonders einfach sein können. Weniger geeignet sind die Formeln jedoch zur Konstruktion von optischen Schichtsystemen mit bestimmten, vorgegebenen Eigenschaften und etwas unhandlich im Gebrauch bei der Errechnung des Reflexionsvermögens für beliebige Phasenwinkel (spektraler Verlauf) oder für komplizierter gebaute Schichtsysteme. In

einigen solcher Fälle kann die im folgenden Abschnitt beschriebene Lösungsmethode einfacher und schneller zum Ziel führen.

III. Graphische Methoden für Näherungslösungen

1. Aufstellung und geometrische Deutung einer Näherungsformel

Es sei angenommen, daß für die reflektierte Gesamtamplitude \mathfrak{R} (Gl. (23)) eines optischen Schichtsystems (Abb. 1) im Falle geringer Reflexion mit guter Näherung geschrieben werden kann:

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{R}_0} \approx \mathfrak{R}_0 + \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \dots + \mathfrak{R}_m + \dots \quad (39)$$

mit:

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1}$$

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} e^{+2j k_1 d_1}$$

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3} e^{+2j (k_1 d_1 + k_2 d_2)}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\mathfrak{R}_m = \frac{n_m - n_{m+1}}{n_m + n_{m+1}} e^{+2j (\sum k_m d_m)},$$

worin $k_m d_m = \frac{2\pi}{\lambda_m} d_m = \frac{2\pi n_m}{\lambda_0} d_m$.

Die Näherungsformel kann geometrisch gedeutet werden als Vektorsumme der Fresnelschen einfach-reflektierten Amplituden (vgl. Gl. (25)), phasenmäßig bezogen auf das vorgelagerte Medium¹⁵⁾. Der physikalische Sinn der Näherung geht aus Abb. 2 hervor: Wir betrachten den Strahlengang am Beispiel einer Ein-

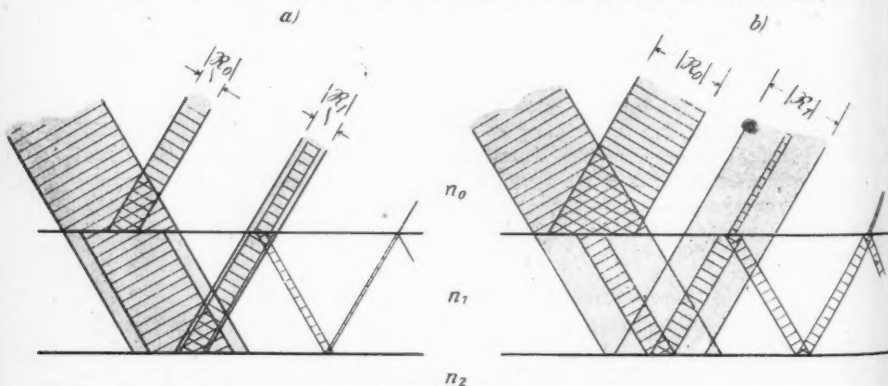


Abb. 2. Strahlengang in einem Einfachschichtsystem mit a) relativ geringer, b) relativ hoher Gesamtreflexion

¹⁵⁾ Wir haben aus anschaulich-geometrischen Gründen die e -Funktionen mit positiven Exponenten angesetzt anstatt mit den in Abschnitt II benutzten negativen Werten. Da wir damit lediglich eine Spiegelung an der reellen Achse vornehmen, ändert diese Maßnahme nichts an den hier interessierenden Ergebnissen.

fachschicht. Die Strahlenbreite deute die absoluten Beträge der Amplituden an; dabei sollen die schraffierten Strahlen den tatsächlichen Verhältnissen entsprechen, die geschwärtzten Strahlen hingegen den durch Formel (39) erfaßten Größen. Die Unterschiede dieser Beträge können jeweils für die einzelnen in das Medium 0 zurückgeworfenen Amplituden aus dem Schema größenordnungsmäßig abgelesen werden. Es ist zu beachten, daß die durch Schraffur minus Schwärzung (bzw. Schwärzung minus Schraffur) sich ergebenden Differenzen der Strahlenbreiten jedoch zunächst noch keine Aussage über den Grad der Näherung des Gesamt-Reflexionsvermögens zulassen, da in der Abbildung lediglich die Amplitudenbeträge dargestellt sind, während zur Errechnung der Gesamtamplitude die Phasenzustände der einzelnen Amplituden berücksichtigt werden müssen. So kann z. B. bei der in Abb. 2a schematisch dargestellten Einfachschicht die Gesamtreflexion — je nach der Schichtdicke (optischen Weglänge) — ebensowohl größer wie auch kleiner sein als der aus der Näherung sich ergebende Wert. Aus einem Vergleich der Abb. 2a und 2b entnimmt man aber sofort, daß Formel (39) die wirklichen Werte um so besser wiedergibt, je geringer die Gesamtreflexion des Systems ist.

Weitere Bemerkungen über Brauchbarkeit und Genauigkeit der Näherung folgen in Abschnitt III, 4. Wir setzen hier die praktische Brauchbarkeit für die nachstehend aufgeführten Fälle zunächst voraus.

2. Anwendung auf Schichtsysteme zur Reflexionsminderung

Für eine Einfachschicht zur Reflexionsminderung von der Dicke d_1 ergibt sich also bei vorgegebenen Brechzahlen n_0, n_1, n_2 das komplexe Amplitudenreflexionsvermögen für die Wellenlänge λ_0 geometrisch aus den zwei Fresnelschen Reflexionsvektoren der beiden Trennungsflächen 0/1 und 1/2 und dem Winkel $2k_1 d_1 = 2 \frac{2\pi n_1}{\lambda_0} d_1$ gemäß Abb. 3.

Das Quadrat der aus der maßstäblichen Zeichnung entnommenen Vektorlänge $|\mathcal{R}|$ ist in Näherung das gesuchte Intensitäts-Reflexionsvermögen (vgl. Gl. (24)). Bei dieser vektorgeometrischen Konstruktion ist darauf zu achten, daß die Richtung der Vektoren \mathcal{R}_m außer vom Winkel $2 \sum k_n d_m$ auch vom Vorzeichen des Betrages $\frac{n_m - n_{m+1}}{n_m + n_{m+1}}$, anschaulich physikalisch also von der optischen Weglänge und vom Phasensprung am optisch dichteren Medium, abhängt.

Der Abb. 3 entnimmt man auch sofort die Voraussetzung für verschwindende Reflexion:

$$\mathcal{R}_1 = -\mathcal{R}_0 \quad \text{für } \mathcal{R} = 0,$$

in Worten: die Vektoren \mathcal{R}_0 und \mathcal{R}_1 müssen gleiche Länge (gleichen absoluten Betrag) und entgegengesetztes Vorzeichen haben. Diese Bedingung ist gegeben mit:

$$a) \quad \frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1} = -\left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right) \quad \text{mit } 2k_1 d_1 = 2\pi, 4\pi, \dots$$

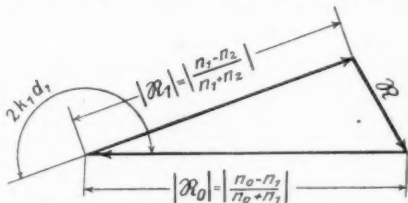


Abb. 3. Bestimmung der Restreflexion $R = |\mathcal{R}|^2$ einer Einfachschicht (hier: $\mathcal{R}_0 = -|\mathcal{R}_0|$, $\mathcal{R}_1 = -|\mathcal{R}_1|$)

oder:

$$b) \frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{mit } 2k_1 d_1 = \pi, 3\pi, 5\pi \dots$$

Und es folgt dann:

$$\text{aus a) } n_0 = n_2 \quad \text{und} \quad n_1 d_1 = \frac{\lambda}{2}, \frac{3}{2}\lambda, \frac{5}{2}\lambda, \dots \quad (\text{Trivialfall})$$

$$\text{aus b) } n_1 = \sqrt{n_0 n_2} \quad \text{und} \quad n_1 d_1 = \frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4}\lambda, \frac{5}{4}\lambda, \dots \quad (\text{vgl. Gl. (28)}).$$

Die Errechnung des spektralen Reflexionsverlaufs einer Einfachschicht soll an einem Beispiel erläutert werden:

Eine Glasoberfläche ($n_g = 1,52$) sei belegt mit einer $\frac{\lambda}{4}$ -Schicht ($n_s = 1,339$); das Reflexionsminimum soll bei $550 \text{ m}\mu$ liegen, also: $d_1 = \frac{550}{4n_s}$. Aus $k_1 d_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0^{(x)}} \frac{550}{4}$ sind dann für beliebige Wellenlängen $\lambda_0^{(x)}$ des Spektrums die entsprechenden Argumente $2kd$ etwa in nachstehender Folge zu bestimmen:

$$\lambda_0^{(x)} = 400 \quad 500 \quad 550 \quad 600 \quad 700 \quad 800 \text{ m}\mu$$

$$2k_1 d_1 = 247,5^\circ \quad 198^\circ \quad 180^\circ \quad 165^\circ \quad 141,4^\circ \quad 123,8^\circ$$

Man erhält damit die vektorielle Darstellung der Abb. 4a und den hieraus ermittelten Kurvenverlauf Abb. 4b.

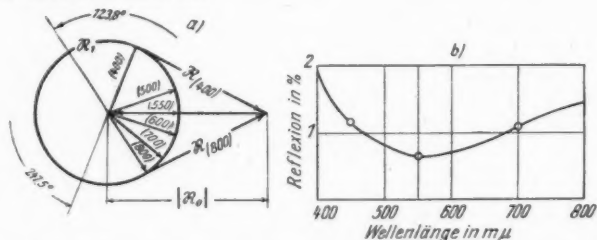


Abb. 4. Spektrale Reflexion einer Einfachschicht. a) vektorgeometrische Konstruktion, b) aus a) ermittelter Kurvenverlauf (○ numerisch ermittelte Werte)

Entsprechend kann der Reflexionsverlauf für Licht der Wellenlänge λ_0 bei veränderlicher Schichtdicke ermittelt werden. Die beliebigen Abweichungen von der (optimalen) optischen Schichtdicke $\frac{\lambda}{4}$ bestimmen dann die einzelnen Argumente $2kd$, z. B. (für $\lambda_0 = 550 \text{ m}\mu$):

$$n_1 d_1 = \frac{1}{16} 550 \quad \frac{1}{8} 550 \quad \frac{3}{16} 550 \quad \frac{1}{4} 550 \quad \frac{5}{16} 550 \quad \frac{3}{8} 550 \quad \frac{7}{16} 550 \quad \frac{1}{2} 550 \text{ m}\mu$$

$$2k_1 d_1 = 45^\circ \quad 90^\circ \quad 135^\circ \quad 180^\circ \quad 225^\circ \quad 270^\circ \quad 315^\circ \quad 360^\circ.$$

Hieraus ergeben sich als vektorielle Darstellung und als Kurvenverlauf die Abb. 5a und 5b.

Als Beispiel einer besonders zweckmäßigen Anwendung des vektorgeometrischen Verfahrens sei noch die vergleichende Darstellung des spektralen Reflexionsverlaufs für Schichten gleichen Materials auf verschiedenen Glassorten angeführt (Abb. 6a und 6b für $n_{\text{Schicht}} = 1,339$; $n_{\text{Glas}} = 1,52; 1,6$ und $1,7$).

Für eine Zweifachschicht zur Reflexionsminderung ergibt sich das Reflexionsvermögen $R = |\mathfrak{R}|^2$ allgemein nach Abb. 7, und man erhält als Voraussetzung für völlige Entspiegelung:

$$\mathfrak{R}_0 = -(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2) \quad \text{für } \mathfrak{R} = 0.$$

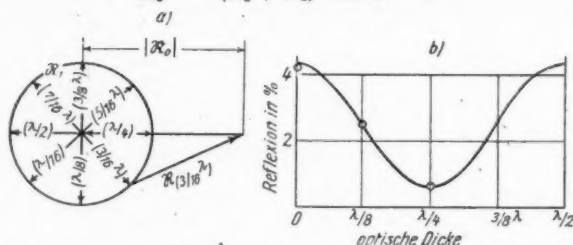


Abb. 5. Reflexion einer Einfachschicht bei veränderlicher Schichtdicke. a) vektordiagramm, b) aus a) ermittelter Kurvenverlauf (○ numerisch errechnete Werte)

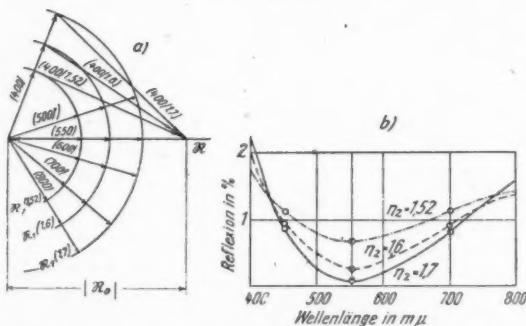


Abb. 6. Spektrale Reflexion einer Einfachschicht bei verschiedenen Glassorten ($n_0 = 1,0$, $n_1 = 1,339$, $n_2 = 1,52; 1,6; 1,7$). a) vektordiagramm, b) aus a) ermittelter Kurvenverlauf (○ numerisch errechnete Werte)

Aus dieser Vektorbedingung folgt, daß bei passend gegebenen Größen (n , d) die anderen Größen (n , d) für $\mathfrak{R} = 0$ mit Hilfe elementarer Dreieckskonstruktionen bestimmt werden können (Beispiel: Abb. 8)¹⁸⁾.

Die Errechnung des spektralen Reflexionsverlaufs einer Zweifachschicht läßt sich nach dem Beispiel der Abb. 9 durchführen. Für optische Schichtdicken $n_1 d_1 = n_2 d_2 = \frac{\lambda}{4}$ und ein Reflexionsminimum

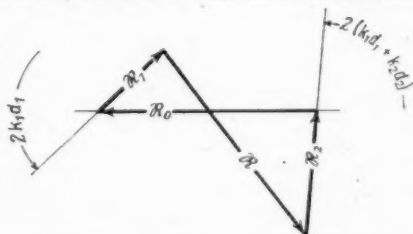


Abb. 7. Zweifachschicht. Bestimmung der Restreflexion $R = |\mathfrak{R}|^2$ (hier: $\mathfrak{R}_0 = -|\mathfrak{R}_1|$, $\mathfrak{R}_1 = -|\mathfrak{R}_1|$, $\mathfrak{R}_2 = +|\mathfrak{R}_2|$)

¹⁸⁾ Über Wertebereiche und Mannigfaltigkeit solcher Lösungen vgl. 2) und Abschnitt II, 3 dieser Arbeit.

bei $\lambda = 550 \text{ m}\mu$ erhält man nämlich für beliebige Wellenlängen:

$\lambda_0^{(x)}$	=	400	500	550	600	700	800 $\text{m}\mu$
$2 k_1 d_1$	=	247,5°	198°	180°	165°	141,4°	123,8°
$2 (k_1 d_1 + k_2 d_2)$	=	495°	396°	360°	330°	282,8°	247,5°

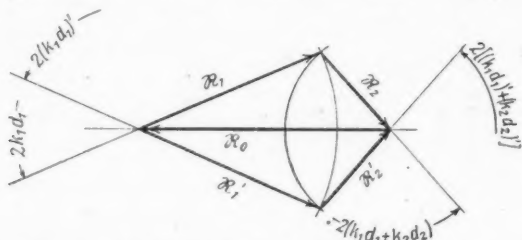


Abb. 8. Zweifachschicht: Bestimmung der Schichtdicken für $R = 0$ bei gegebenen Brechzahlen. 2 Lösungen (hier: $R_0 = -|R_0|$, $R_1 = -|R_1|$, $R_2 = +|R_2|$)

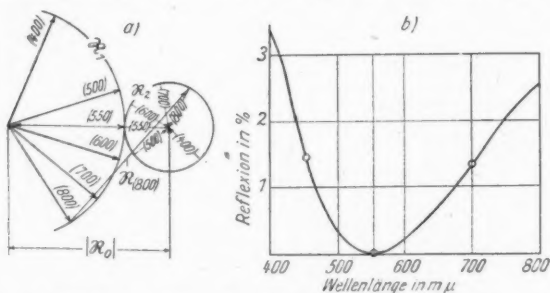


Abb. 9. Spektrale Reflexion einer Zweifachschicht ($n_0 = 1,0$, $n_1 = 1,339$, $n_2 = 1,65$, $n_3 = 1,52$). a) vektorgeometrische Konstruktion, b) aus a) ermittelter Kurvenverlauf (○ numerisch errechnete Werte)

Es versteht sich, daß in gleicher Weise der spektrale Reflexionsverlauf errechnet werden kann für Brechkombinationen, die an keiner Stelle des Spektrums die Reflexion verschwinden lassen oder für welche für $R = 0$ die optischen Schichtdicken von $\frac{\lambda}{4}$ abweichen. Ebenso können auch andere funktionelle Abhängigkeiten der Reflexion ermittelt werden, wie z. B. R als Funktion der beiden veränderlichen Schichtdicken¹⁷⁾.

Auf Drei- und Mehrfachschichten läßt sich das Verfahren ebenfalls mit Erfolg anwenden. Allerdings ist die entsprechend erweiterte geometrische Konstruktion (von deren Darstellung hier abgesehen werden soll) bereits umständlicher, bleibt jedoch immer, wie man sich leicht überzeugt, weit anschaulicher und einfacher als die numerische Errechnung, für welche die Kompliziertheit mit wachsender Schichtzahl ja sehr erheblich zunimmt.

¹⁷⁾ Im Interesse der besonderen Anschaulichkeit wurden in den bisherigen Beispielen für die Brechzahlen z. T. praktisch nicht realisierbare Werte gewählt. Es ist Sache der Konstruktion, tatsächlich existierende Wertekombinationen einzusetzen.

3. Konstruktion von Schichtsystemen zur Reflexionsminderung

Aus vorstehenden, sowie weiteren passend gewählten Anwendungsbeispielen geht die Gesetzmäßigkeit, mit welcher die Eigenschaften von Schichtsystemen von den gewählten Bedingungen näherungsweise abhängen, anschaulich hervor, so daß nach einiger Übung klar übersehen werden kann, wie die einzelnen physikalischen Größen

Betrag der Fresnelschen Amplitude,
Phasensprung und
optische Weglänge (Schichtdicke)

in den Endwert für das Reflexionsvermögen eingehen. Die Konstruktion von Schichtsystemen zur Reflexionsminderung bedeutet somit keine prinzipielle Schwierigkeit mehr¹⁸⁾. Abb. 10a und 10b zeigen günstige spektrale Reflexionskurven, die mit Hilfe dieses Verfahrens ermittelt wurden.

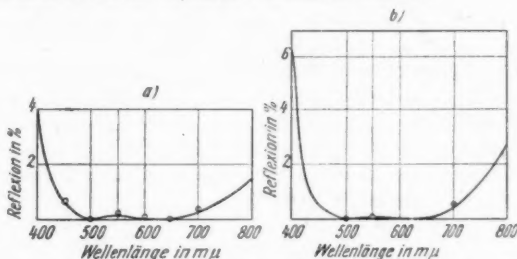


Abb. 10. Reflexionsmindernde Mehrfachsichten mit günstigem Verlauf der Reflexion im mittleren Teil des Spektrums. a) Zweifachschicht (auf hochbrechendem Glas), b) Dreifachschicht (○ numerisch errechnete Werte)

4. Anwendungsbereich und Genauigkeit der geometrischen Methode

Eine allgemeine Diskussion der Näherungsformel (39), etwa durch analytischen Vergleich mit den entsprechenden, passend umgeformten Gleichungen aus Abschnitt II, ist umständlich, und eine Fehlerabschätzung, z. B. durch Einführen eines allgemeinen Fehlergliedes, für praktische Zwecke ungeeignet, weil hiermit zumindest die durch die Näherung erreichte Vereinfachung wieder verloren ginge. Die aus einer größeren Anzahl von Beispielen gewonnene Erfahrung ergibt jedoch als einfache und leicht anwendbare „Faustregel“, daß bei Reflexionen unter 10 bis 20% (also im Bereich der Aufgaben zur Reflexionsminderung) die Fehler gering bleiben und für die Praxis vernachlässigt werden können. So zeigen u. a. die in Abschnitt III, 2 und 3 angeführten Beispiele (sowie eine Reihe weiterer vom Verfasser geometrisch ermittelter Kurven auch von Drei- und Mehrfachsichten) sehr geringe Abweichungen, die in den für die Kurvendarstellung gewählten Maßstäben kaum bemerkbar werden²⁰⁾. Trotzdem ist eine Kontrolle in jedem einzelnen Fall zu empfehlen:

¹⁸⁾ Für systematische Untersuchungen kann es zweckmäßig sein, weitere graphische und rechnerische Vereinfachungen einzuführen: vgl. ¹⁹⁾.

¹⁹⁾ Schweizer Patent 223344 (4. 1. 1943): Überzug zur Verminderung der Oberflächenreflexion.

²⁰⁾ Bei geeignet gewähltem Maßstab der vektoriellen Darstellung (Verf. hat vorwiegend 100 mm : $(\sqrt{2}) = 0,1$ benutzt) liegen die Abweichungen größenordnungsmäßig z. T. noch innerhalb des Fehlerbereichs der mit Rechenschieber ermittelten Ergebnisse.

Dabei genügt es i. a., die durch geometrische Konstruktionen gewonnenen Kurven jeweils nur an einigen ausgewählten Stellen mit den numerisch ermittelten Werten zu vergleichen (vgl. Abb. 4—6, 9 und 10). Wenn solche Kontrollen wieder eine beträchtliche Erschwerung für die praktische Handhabung des Verfahrens bedeuten, so muß bedacht werden, daß die Aufgabe der Näherungsmethode u. a. darin liegt, zunächst durch schnelle und übersichtliche Lösungen eine Vielzahl verschiedener Kombinationen auf ihre optischen Eigenschaften hin grob zu untersuchen, um dann die geeignet erscheinenden Systeme numerisch genau auswerten zu können.

5. Anwendung auf optische Elemente mit relativ hoher Reflexion

Wie aus dem vorigen Abschnitt folgt, ist die Näherungsformel für eine genaue quantitative Bestimmung des Reflexionsvermögens stark reflektierender optischer Systeme nicht mehr brauchbar. Dagegen lassen sich mit ihrer Hilfe eine Reihe wertvoller qualitativer Aussagen machen, die für die Konstruktion solcher Elemente nützliche Hinweise geben können.

Auf die vielfache Möglichkeit, durch vektorgeometrische Skizzen auch prinzipielle Fragen der „Optik dünner Schichten“, insbesondere auf dem noch wenig ausgeschöpften Gebiet der Lichtfilterung, wenigstens qualitativ zu beantworten, um damit Ausgangspunkte für spezielle numerische Untersuchungen zu gewinnen, kann hier nur hingewiesen werden. Ins einzelne gehende Betrachtungen sollen einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

IV. Schlußbetrachtung

Die numerische wie auch die graphische Lösungsmethode besitzen in ihrer Anwendbarkeit auf Probleme der „Optik dünner Schichten“ zunächst einen formal-vereinfachenden bzw. heuristischen Wert. Darüber hinaus ergeben sich jedoch in zahlreichen speziellen Fällen auch wesentliche Vereinfachungen für die numerische Rechnung und praktische Hilfen für die Konstruktion.

Nach Abschluß dieser Arbeit erhielt ich Kenntnis von folgenden Veröffentlichungen:

W. Weinstein: The reflectivity and transmissivity of multiple thin coatings. J.O.S.A. 37, 576 (1947), ref.: Physik. Ber. 27, 439 (1948) und

R. B. Muchmore: Optimum band width for two layer anti-reflection films. J.O.S.A. 38, 20 (1948), ref.: Phys. Kartei Universum 15 (29) 48.

Leider sind mir diese Abhandlungen, in denen — nach den Referaten zu urteilen — eine Reihe von Berührungspunkten mit dem hier behandelten Thema vorhanden sein dürften, in der Originalfassung z. Z. nicht zugänglich, so daß eine Bezugnahme unterbleiben mußte.

Jena, Carl Zeiss-Werke.

(Bei der Redaktion eingegangen am 9. August 1949.)

Die Tröpfchenbildung an Ionen in der Wilsonschen Nebelkammer¹⁾

Von M. Pollermann

(Mit 24 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Während der Expansion einer Wilsonschen Nebelkammer wird die elektrische Beweglichkeit der Ionen kontinuierlich gemessen und damit das Anwachsen der Ionenradien und der Einsatz der spontanen Tröpfchenbildung verfolgt. Die Meßergebnisse bestätigen die Volmersche Theorie und vermitteln ihre Anwendung auf die Praxis der Nebelkammer.

I. Einleitung

Die alte Thomsonsche Theorie der Tröpfchenbildung an Ionen ist von M. Volmer²⁾ in zwei wesentlichen Punkten verbessert worden.

1. Bei der Berechnung des Dampfdruckes geladener Tröpfchen behandelt er die Tröpfchen nicht wie J. J. Thomson als elektrisch leitende Kügelchen (Dielektrizitätskonstante $\epsilon = \infty$), sondern als Dielektrika mit einer Dielektrizitätskonstante $\epsilon = 1,85$. Ihr Dampfdruck ergibt sich dann aus

$$\ln \frac{p_r}{p_\infty} = \frac{M}{RT\rho} \left(\frac{2\sigma}{r} - \left(1 - \frac{1}{\epsilon} \right) \frac{e^2}{8\pi r^4} \right), \quad (1)$$

wo p_r der Dampfdruck eines Tröpfchens vom Radius r , p_∞ der Dampfdruck einer ebenen Wasserfläche, M das Molekulargewicht, ρ die Dichte, σ die Oberflächenspannung, ϵ die Dielektrizitätskonstante und e die Elementarladung bedeutet (Abb. 1).

2. Er berücksichtigt die für den Vorgang der Tröpfchenbildung maßgebenden Schwankungserscheinungen. Die Tröpfchen bilden sich nach seiner Theorie auf folgende Weise: Bei steigender Übersättigung wachsen die Radien der geladenen Tröpfchen im Mittel entsprechend Gl. (1) an. Bei jeder Übersättigung treten aber infolge von lokalen Dichteschwankungen Tröpfchen mit wesentlich größerem Radius auf. Mit zunehmender Übersättigung wächst die Wahrscheinlichkeit dafür, daß einzelne Tröpfchen infolge dieser Schwankungen einen Radius erreichen, bei dem das spontane Wachstum der Tröpfchen einsetzt (Abb. 2). Volmer bezeichnet Tröpfchen von diesem Radius bei der betreffenden Übersättigung als Keime. Die Häufigkeit J , mit der sich solche Keime bilden, ergibt sich nach Volmer zu

$$J = Z \cdot F \cdot e^{-\frac{A}{kT}}. \quad (2)$$

¹⁾ Habilitationsschrift Karlsruhe (gekürzt).

²⁾ G. Thomfor u. M. Volmer, Ann. Physik **33**, 109 (1938).

Hier bedeutet Z die Zahl der vorhandenen Tröpfchen vom Radius r im cm^3 (diese Zahl entspricht der Zahl der vorhandenen Ionen), F ist ein Faktor, der aus der Übergangszahl der Moleküle je sec und cm^2 und der Oberfläche der zu bildenden Tröpfchen berechnet werden kann. Die im Exponenten stehende, entscheidende Größe A ist die Keimbildungsarbeit und ist

$$A = \frac{4\pi}{3} \sigma (r_k^3 - r_a^3) - \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \frac{2e^2}{3} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_k}\right). \quad (3)$$

r_a und r_k sind die einer bestimmten Übersättigung entsprechenden Anfangsradien, bzw. Keimradien, die nach Gl. (1) für jede Übersättigung berechnet werden können. (Gl. (1) läßt sich stets durch zwei verschiedene Werte von r erfüllen.)

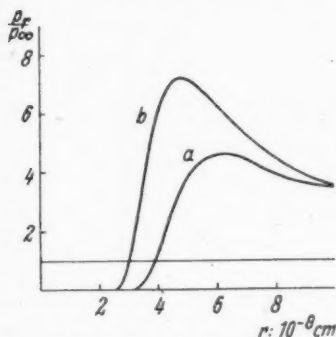


Abb. 1. Verhältnis des Dampfdrucks p_r eines geladenen Tröpfchens zum Dampfdruck p_{∞} einer ebenen Wasserfläche als $f(r)$. Kurve a nach J. J. Thomson, Kurve b nach M. Volmer

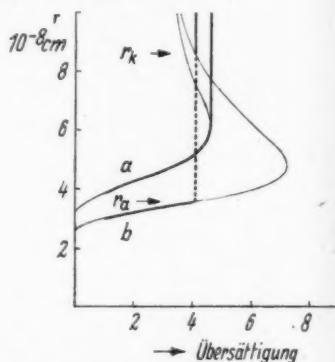


Abb. 2. Anwachsen eines geladenen Tröpfchens bei steigender Übersättigung. Kurve a nach J. J. Thomson, Kurve b nach M. Volmer

Für eine Keimbildungshäufigkeit J von einem Tröpfchen pro Sekunde und cm^3 wird der Vorgang beobachtbar. Volmer bezeichnet die dieser Keimbildungshäufigkeit entsprechende Übersättigung als „kritische Übersättigung“.

Die Messung der kritischen Übersättigung erfolgt, indem man das Expansionsverhältnis einer Wilsonschen Nebelkammer stetig vergrößert, bis man Tröpfchenbildung beobachtet. Aus dem so bestimmten kritischen Expansionsverhältnis wird dann die kritische Übersättigung berechnet. Messungen dieser Art können allerdings die Volmersche Theorie nicht bestätigen. Dazu müssen erst bestimmte Annahmen über die Dielektrizitätskonstante ϵ gemacht werden. Für den Wert $\epsilon = 1,85$ ergibt sich Übereinstimmung mit dem Experiment.

Abgesehen davon bleiben noch mehrere Fragen offen.

1. Die Meßergebnisse verschiedener Autoren zeigen starke Abweichungen von dem oben angegebenen Wert³⁾.

2. Bei allen Untersuchungen ergibt sich ein großer Unterschied in der kritischen Übersättigung für die Kondensation an positiven und an negativen Ionen³⁾.

3. In der Praxis der Nebelkammer arbeitet man bei der Verwendung von Wasserdampf für gewöhnlich mit einem Expansionsverhältnis von 1,31 entspre-

³⁾ L. Scharrer, Ann. Physik 35, 616 (1939).

chend einer Übersättigung von 5,9. Dieser Wert scheint in keinem Zusammenhang mit der oben skizzierten Theorie von Volmer und den Versuchen zu ihrer Bestätigung zu stehen.

Im folgenden werden Versuche beschrieben, die einen Beitrag zur Aufklärung der angeführten Fragen darstellen. Sie erfolgten nach einer neuen Methode, die sich durch besonders große Übersichtlichkeit auszeichnet.

II. Das Prinzip der neuen Methode

Die Methode beruht auf der Messung der elektrischen Beweglichkeit der Ionen während der Expansion einer Wilsonschen Nebelkammer. Zu diesem Zweck koppelt man die Erzeugung der Ionen und die An- und Abschaltung eines elektrischen Feldes mit der Kolbenbewegung.

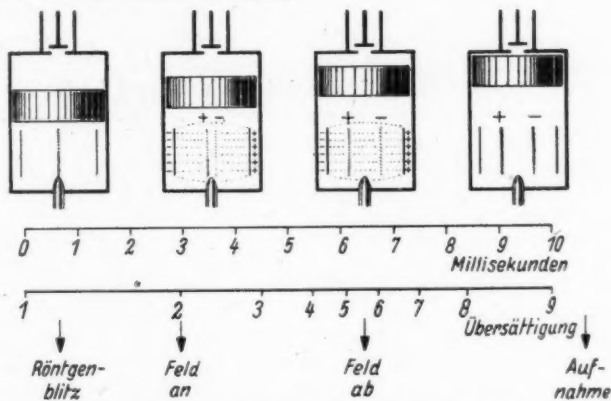


Abb. 3. Vorgänge bei der Messung der Ionenbeweglichkeit in der Nebelkammer

Die Vorgänge, die sich während einer Messung abspielen, sind in Abb. 3 in vier aufeinanderfolgenden Phasen dargestellt.

Mit der Öffnung des Nebelkammerventils setzt die Bewegung des Kolbens, d. h. die Expansion ein. Der zeitliche Verlauf der Kolbenbewegung wird registriert. Das ergibt die in Abb. 3 eingezeichnete Zeitskala. In jedem Zeitpunkt ist das Expansionsverhältnis und damit die Übersättigung in der Nebelkammer bekannt. Sie ist in Abb. 3 in einer zweiten Skala aufgetragen.

Während der Expansion geschieht nun folgendes:

1. In einem ganz bestimmten, einstellbaren Zeitpunkt tritt ein Röntgenblitz in die Kammer ein und erzeugt eine Ionensäule, die zu gleichen Teilen aus positiven und negativen Ionen besteht.

2. In einem zweiten, wiederum beliebig einstellbaren Zeitpunkt wird zwischen zwei plattenförmigen Elektroden in der Kammer ein elektrisches Feld gelegt. Unsere Darstellung zeigt einen etwas später liegenden Zeitpunkt. Man sieht, wie die positiven Ionen nach links, die negativen Ionen nach rechts wandern. Die Geschwindigkeit, mit der die Ionen wandern, ist nicht gleichförmig. Denn während ihrer Wanderung wächst die Übersättigung in der Kammer, die Ionen beladen sich mit Wassermolekülen und verlieren dadurch an elektrischer Beweglichkeit.

3. In einem dritten, ebenfalls einstellbaren Zeitpunkt wird das elektrische Feld zwischen den Platten abgeschaltet. In diesem Augenblick bleiben alle Ionen stehen. Diese Stellung behalten sie bei bis zur photographischen Aufnahme.

4. Gegen Ende der Expansion wachsen die Tröpfchen zur sichtbaren Größe an. Nach Abschluß der Expansion wird die so gebildete Nebelspur seitlich beleuchtet und photographiert.

In mehreren aufeinanderfolgenden Aufnahmen wird nun der Zeitpunkt für die Anschaltung des elektrischen Feldes festgehalten. Der Zeitpunkt für die Abschaltung des elektrischen Feldes wird nach und nach um ein bestimmtes Zeitintervall verschoben. Man erhält dann Aufnahmen, aus denen man die Wegstrecken entnehmen kann, die die betreffenden Ionensäulen in bestimmten Zeitintervallen während der zunehmenden Übersättigung in der Nebelkammer zurückgelegt haben. Da alle übrigen Versuchsbedingungen konstant gehalten werden, darf man annehmen, daß dies auch die Wegstrecken sind, die eine einzelne Ionensäule bei dauernd eingeschaltetem elektrischen Feld in diesen Zeitintervallen zurücklegt. D. h. die aufeinanderfolgenden Aufnahmen stellen eine Art Zeitlupenaufnahme des an sich natürlich völlig unsichtbaren Vorganges der Ionenwanderung im elektrischen Feld während der Expansion dar.

Aus einer solchen Aufnahmeserie kann man dann nachträglich bequem den Weg der Ionen als Funktion der Zeit und der Übersättigung entnehmen. Man kann die Geschwindigkeit und die Beweglichkeit der Ionen als Funktion der Übersättigung ermitteln, man kann feststellen, bei welcher Übersättigung diese Geschwindigkeit null geworden ist, d. h. das spontane Anwachsen der Ionen eingesetzt hat.

Durch entsprechende Einstellung des Zeitpunktes, in dem die Einschaltung des elektrischen Feldes erfolgt, kann man jeden Übersättigungsbereich für sich im einzelnen untersuchen, um beispielsweise die kritische Übersättigung zu messen. Die Genauigkeit der Methode läßt sich mit einem entsprechenden technischen Aufwand fast beliebig steigern. Die Festlegung der Meßergebnisse in Form von photographischen Aufnahmen schließt subjektive Beobachtungsfehler aus. Während nach der alten Methode der Variation des Expansionsverhältnisses sozusagen nur ein Meßpunkt, nämlich die kritische Übersättigung ermittelt werden kann, gibt die neue Methode ein anschauliches Bild des gesamten Vorganges.

III. Plan und Arbeitsweise der Apparatur

Der Aufbau und die Wirkungsweise der zu den Versuchen verwendeten Apparatur sei an Hand des Plans Abb. 4 beschrieben.

Eine Wasserstrahlpumpe pumpt das Vorkuumgefäß 1 aus. Durch einen Stromstoß wird das elektromagnetisch betätigte Ventil 2 geöffnet, so daß die Luft aus der Vorkammer 3 abströmt. Das Wasserdampf-Luft-Gemisch in der Nebelkammer 4 gelangt zur Expansion. Dabei wird der Kolben 5 zusammen mit der Kolbenstange nach oben gedrückt. Die an der Kolbenstange sitzende Spitze 6 zeichnet die Bewegung des Kolbens auf einer beruhten Stahlwalze auf, die von einem Synchronmotor 7 in gleichförmiger Rotation gehalten wird. Die pilzförmigen Kontakte 8 entladen den Hochspannungskondensator 9 über die Röntgenröhre 10, so daß eine kurz dauernde Einstrahlung eines Röntgenbündels 11 in die Nebelkammer erfolgt. Der Doppelschleifkontakt 12, der bis dahin über den Metallzylinder 13 das elektrische Feld in der Nebelkammer zwischen den Elektroden 14 kurzgeschlossen hatte, gleitet über die isolierenden Zylinder 15 und 16 und gibt dabei das Feld in der Nebelkammer frei. Während dieser Zeit tritt eine Aufspaltung der

Ionensäule auf. Kurze Zeit später erreicht der Schleifkontakt 12 die Metallwalze 17 und schließt das Feld wieder kurz. Die Ionensäulen bleiben stehen.

Bei Beendigung der Expansion schaltet ein nichteingezeichnete Kontakt den Magneten 18 ein. Er öffnet eine Spaltblende, so daß das Licht der Quecksilberhöchstdrucklampe 19 über die Küvette 20 und einige Linsen in die Nebelkammer eintritt und die entstandene Nebelspur beleuchtet. In einer Richtung senkrecht zur Beleuchtungsrichtung erfolgt dann die photographische Aufnahme durch elektromagnetische Auslösung des Verschlusses der photographischen Kamera 21.

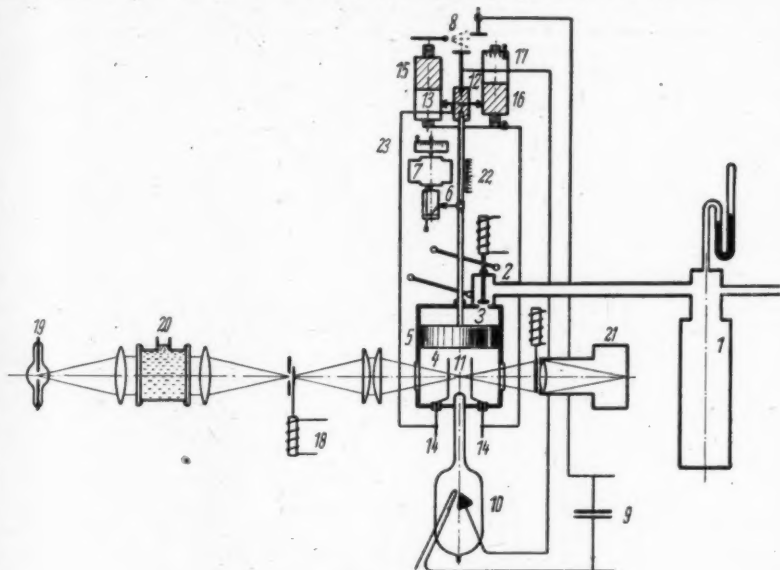


Abb. 4. Versuchsanordnung (schematisch)

Nach erfolgter Aufnahme kann aus der Registrierkurve auf der beruhten Walze des Synchronmotors 7 mit Hilfe der Millimeterskala 22 und der Kreisskala 23 der Weg des Kolbens während der Expansion als Funktion der Zeit ermittelt werden.

IV. Konstruktion der Nebelkammer

Abb. 5 zeigt einen Schnitt durch die Nebelkammer. Sie weist einen Innendurchmesser von 70 mm auf. Der obere Teil wird von zwei kräftigen Flanschen gebildet. Sie werden von vier starken, in der Abb. nicht eingezeichneten Bolzen getragen und gleichzeitig zusammengepreßt. Eine zylindrische Ausdrehung bildet die Vorkammer, die den Kolben aufnimmt. Als Kolbendichtung dient eine Simrit-Hutmanschette, die zwischen die beiden Flansche gepreßt ist. Der Kolben ist aus Leichtmetall. Er trägt einen kleinen Dämpfungskolben aus Eisen. Seine Masse einschließlich Dämpfungskolben und Kolbenstange betrug nur 90 g. Seine Mantelfläche war glanzpoliert und schwach gefettet, so daß er sich mit nur geringer Reibung durch die Kolbendichtung hindurch bewegt. Bei der Bewegung des Kolbens

preßt der auf seiner Oberseite sitzende Dämpfungskolben die Luft im Dämpfungszylinder zusammen. Diese entweicht unter Abbremsung der Kolbenbewegung durch einen engen Kanal in der Kolbenstangenführung. Der obere Flansch ent-

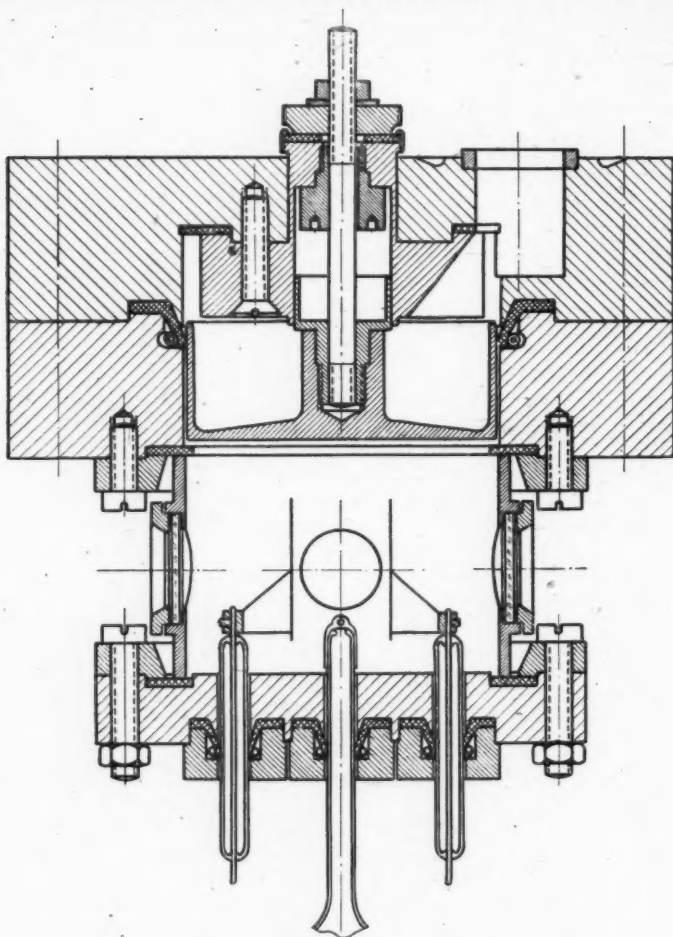


Abb. 5. Nebelkammer im Schnitt

hält ferner noch eine Gummiplatte, die den Aufschlag des Kolbens mildert, und den Anschlußstutzen für das Ventil (Abb. 6).

Die zylindrische Wand der Nebelkammer besteht aus einem Metallring, in den mit Hilfe von Gummidichtungen vier runde Glasfenster eingesetzt sind. Er ist mit Flachgummiringen gegen den darüber liegenden Flansch und den darunter liegenden Kammerboden abgedichtet.

Der Kammerboden wird von vier, in der Abbildung nicht eingezeichneten Bolzen gegen den Kammerring gepreßt. Er enthält drei kleine Simrit-Hutmanschetten, durch welche die Elektroden und die Röntgenröhre in die Kammer eingeführt werden. Die Elektroden bestehen aus nahezu quadratischen Platten aus dünnem Messingblech. In der Mitte erhielten sie einen schmalen Schlitz, durch den hindurch die Nebelspur beleuchtet werden kann. Die Röntgenröhre (Abb. 7) trägt eine dünnwandige Metallkappe, in deren Spitze sich eine Bohrung von 0,6 mm befindet, die als Blende für das Röntgenstrahlenbündel wirkt. Alle im Innern der Kammer liegenden Teile wurden geschwärzt.

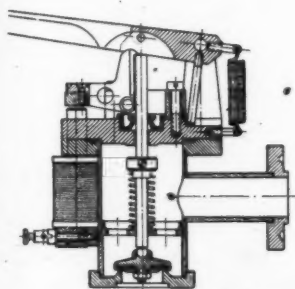


Abb. 6. Ventil zur Nebelkammer

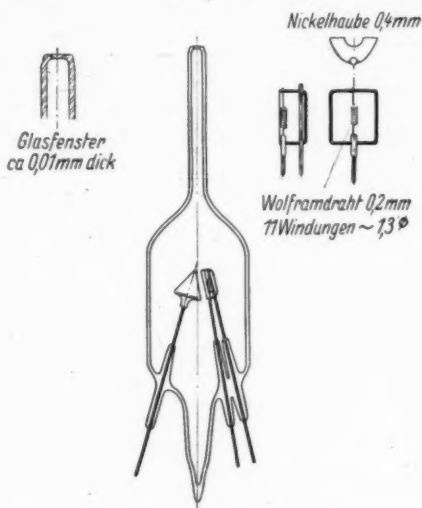


Abb. 7. Liliput-Röntgenröhre

V. Die Durchführung der Versuche

Die Voraussetzung für die Durchführung der geplanten Messungen bilden Vorversuche, welche die Einstellung und Messung der Kolbengeschwindigkeit und die Messung des Expansionsverhältnisses zum Ziele hatten. Die Geschwindigkeit des Kolbens im ersten Teil der Bewegung hängt im wesentlichen von der Öffnung des Ventils und dem Volumen des Vorvakuumgefäßes ab. Im letzten Teil der Bewegung ist sie durch die Einstellung der Luftdämpfung bedingt. Durch schrittweise Änderung dieser Versuchsbedingungen gelang es Kolbenbewegungen zu erhalten, bei denen die Geschwindigkeit während des Hubs, abgesehen vom Anlauf und vom Auslauf praktisch konstant bleibt und gegen Ende des Hubs rasch gegen Null geht, ohne daß der Kolben zurückprallt (Abb. 8a). Führt man etwas Öl in den Dämpfungszyylinder ein, so kann man wesentlich langsamere Kolbengeschwindigkeiten entsprechend den Kurven Abb. 8b und 8c einstellen. Die Geschwindigkeit bleibt dann allerdings bei aufeinanderfolgenden Versuchen nicht so konstant, wie das bei reiner Luftdämpfung der Fall ist.

Die Abhängigkeit des Expansionsverhältnisses vom Kolbenhub wurde erstens durch Berechnung aus geometrischen Daten und zweitens durch Messung der bei der Expansion auftretenden Druckerniedrigung ermittelt. Abb. 9, Kurve a zeigt das Expansionsverhältnis V_1/V_0 in Abhängigkeit vom Kolbenhub. Die bei einem

bestimmten Expansionsverhältnis auftretende Übersättigung wurde in der üblichen Weise aus der Temperaturerniedrigung infolge der Expansion und den Dampfdrücken bei der Anfangstemperatur und bei der Endtemperatur berechnet. Abb. 5, Kurve b, rechte Skala zeigt das Ergebnis. Aus Messungen von Flood⁴⁾ weiß man, daß sich die berechneten Temperaturerniedrigungen wirklich einstellen. Ein Ansteigen der Temperatur infolge frei werdender Kondensationswärme bzw. eine Erniedrigung des Dampfdrucks durch die Tröpfchenbildung spielt im Bereich der kritischen Übersättigung noch keine Rolle.

Bei der Herstellung der Nebelspuraufnahmen wurde stets mit einem Kolbenhub von 20,5 mm gearbeitet, so daß das Expansionsverhältnis bis auf 1,391 anstieg, was einer mehr als 8fachen Übersättigung entspricht. Damit überschritt diese schon den Grad, bei dem allgemeine Nebelbildung auftritt. Da, wie aus VII

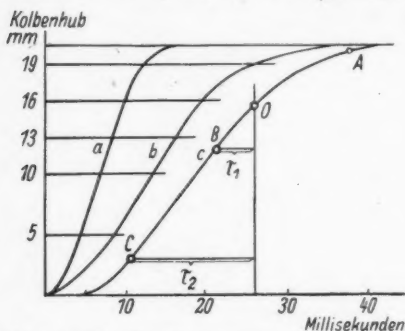


Abb. 8. Weg-Zeit-Diagramme der Kolbenbewegung

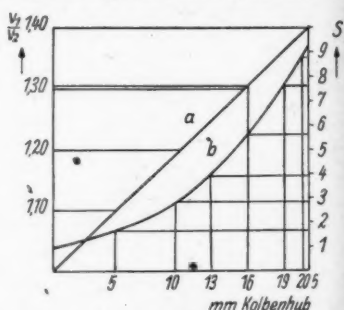


Abb. 9. Abhängigkeit des Expansionsverhältnisses v_1/v_0 und der Übersättigung S vom Kolbenhub

hervorgeht, der zu messende Vorgang bis zu diesem Abschnitt der Expansion bereits seinen Abschluß gefunden hat, beeinflusst diese allgemeine Nebelbildung das Meßergebnis in keiner Weise. Andererseits war dieses extrem hohe Expansionsverhältnis unbedingt erforderlich, um auch die Vorgänge an den positiven Ionen übersehen zu können.

Vor der Herstellung der photographischen Aufnahmen wurden auf der berußten Stahlwalze des Synchronmotors Ringmarken angebracht, die den Einsatz, bzw. die Abschaltung des elektrischen Feldes in den gewählten zeitlichen Abstufungen kennzeichneten, so daß sie direkt in den Diagrammen nach Abb. 8 erschienen. Dazu wurden die Kontaktwalzen Abb. 4/15 und 17 mikrometrisch auf den gewünschten Kolbenhub eingestellt. Dann wurde der Kolben mit einer Stellschraube langsam nach unten bewegt, bis ein Voltmeter das Auftreten bzw. Verschwinden der Spannung anzeigte. Bei dieser Stellung wurde dann die berußte Walze gedreht, so daß sich darauf ein Markierungsring abzeichnete. Solche Markierungsringe wurden stets für einen Kolbenhub von 5, 10, 13, 16 und 19 mm angebracht.

Die Zündung des Röntgenblitzes durch die Kolbenbewegung erfolgte stets 2 mm vor der Einschaltung des elektrischen Feldes. Eine Prüfung des Spannungsverlaufs an der Röntgenröhre mit dem Kathodenstrahloszillographen ergab, daß

⁴⁾ H. Flood, Diss. (Berlin 1933).

hen
apf-
p. 5,
reiß
Ein
eine
der

en-
an-
ritt
VII

S
↑

ns-
tti-

on
ng
ns-
en

de-
tz,
tu-
en.
ge-
be
en
ge-
gs-
nt.
am
er-
aß

u
d
b
ö
L
A
na
ri
m
tr
ei
lä
da
bi

ga
ne
un
die
de

ein
lag
me
auf
Ab
ele
der
tro
etw

dar

unter diesen Umständen der Vorgang der Ionenerzeugung abgeschlossen ist, bevor das elektrische Feld zu wirken beginnt.

Die Aufnahmen wurden auf Normalfilm Agfa Isopan F gemacht. Der Abbildungsmaßstab war 1:1,025. Die Belichtungszeit betrug bei einer Blendenöffnung von $1:3,5 \frac{1}{100}$ sec. Das Bildformat war $24 \cdot 24 \text{ mm}^2$.

Die erste Aufnahme wurde stets ohne elektrisches Feld gemacht. Sie zeigt die Lage der Ionensäulen bei den darauffolgenden Aufnahmen vor ihrer Aufspaltung. Aufnahmen dieser Art wurden zur Kontrolle immer wieder eingeschaltet. Die Aufnahmen mit elektrischem Feld wurden stets paarweise gemacht, wobei die Feldrichtung bei der zweiten Aufnahme umgekehrt wurde. So ließen sich alle Asymmetrien in den Aufnahmebedingungen eliminieren. Die Zeiten, in denen das elektrische Feld eingeschaltet war, wurden bei den aufeinanderfolgenden Aufnahmen einer Serie zuerst stufenweise vergrößert, dann stufenweise verkleinert usw. Damit läßt sich vermeiden, daß irgendwelche allmähliche Veränderungen in der Apparatur das Meßergebnis systematisch beeinflussen. Bei jeder Aufnahme konnten die gebildeten Nebelspuren auch visuell beobachtet werden.

VI. Diskussion einzelner Aufnahmen

Einige Fragen, die für die Auswertung der Aufnahmeserien im Sinne der eingangs erwähnten Methode von großer Bedeutung sind, lassen sich an Hand einzelner Aufnahmen klären. Es sind dies vor allem die folgenden Probleme:

1. Wie sieht die Ionenverteilung im Augenblick des Entstehens der Ionen aus und wie ändert sie sich während der Expansion durch Diffusion?

2. In welcher Weise erfolgt die Wanderung der Ionensäule? Nehmen alle Ionen dieselbe Geschwindigkeit an? Werden sie alle bei derselben Übersättigung von der spontanen Kondensation befallen?

Diese Fragen sollen im folgenden beantwortet werden.

a) Die primäre Ionenverteilung

Läßt man den Röntgenblitz erst gegen Ende der Expansion in die Nebelkammer eintreten, so werden die Ionen innerhalb weniger als 10^{-5} sec (s. § 8) durch Anlagerung von H_2O -Molekülen so beschwert, daß sich bei ihnen die Diffusion nicht mehr bemerkbar macht. Man kann deshalb aus der Aufnahme einen Schluß ziehen auf die räumliche Verteilung der Ionendichte im Augenblick der Ionisierung. Abb. 10 zeigt eine solche Aufnahme. Sie läßt deutlich etwa 40 einzelne Photoelektronenbahnen auf 1 cm Spurlänge erkennen. Da es sich um Photoelektronen der Eisen-K-Strahlung mit 7 keV Energie handelt, enthält jede Photoelektronenbahn entsprechend dem Ionisierungsaufwand für Luft von 32,4 eV etwa 200 Ionenpaare.

b) Die Veränderung der Ionenverteilung unter dem Einfluß der Diffusion

Die Verteilung der Ionendichte in einer Ionensäule läßt sich näherungsweise darstellen durch eine Funktion von der Form⁵⁾

$$n = \frac{N_0}{\pi b^2} \exp \frac{-r^2}{b^2}, \quad (1)$$

⁵⁾ M. Pollermann, Z. Physik **126**, 276 (1949).

wo N_0 die spez. Ionisierung (in unserem Fall etwa 8000 Ionenpaare/cm) bedeutet und b eine Konstante, die von der Ausblendung des Röntgenstrahlbündels und von der Energie der Photoelektronen abhängt. Nach einer Zeit τ hat sich die Ionensäule durch Diffusion verbreitert. Die Ionendichte ist dann gegeben durch

$$n = \frac{N_0}{\pi (4 D \tau + b^2)} \exp \frac{r^2}{4 D \tau + b^2} \quad (2)$$



Abb. 10. Aufnahme F 38: Primäre Ionisierung in Form von Photoelektronenbahnen



Abb. 11. Aufnahme F 32: Ionensäule 3,5 Millisekunden nach der Einstrahlung

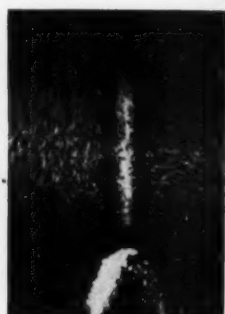


Abb. 12. Aufnahme F 28: Ionensäule 16,6 Millisekunden nach der Einstrahlung



Abb. 14. Aufnahme E 14: Ionensäule ca. 1 Millisekunde nach der Einstrahlung im feldfreien Raum



Abb. 15. Aufnahme E 15: Ionensäule ca. 1 Millisekunde nach der Einstrahlung im elektrischen Feld

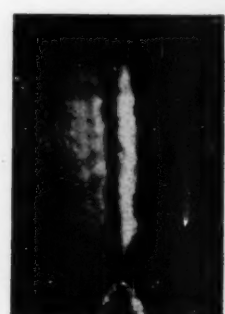


Abb. 16. Ionensäule, zwischen 5- und 7facher Übersättigung im Feld aufgespalten

wo D den Diffusionskoeffizienten bedeutet. Dieser Verteilung der Ionendichte entspricht eine Halbwertsbreite der Photometerkurve der Nebelspuraufnahme von

$$2 x_H = 2 \sqrt{\ln 2 (4 D \tau + b^2)} \quad (3)$$

multipliziert mit der bei der Photometrierung eingestellten Vergrößerung.

Solche Photometerkurven sind von den Aufnahmen Abb. 10, 11 und 12 hergestellt worden und in Abb. 13 zusammengestellt (Vergrößerung 7,4fach). Die Aufnahmen wurden bei geringer Kolbengeschwindigkeit entsprechend der Kurve Abb. 8c hergestellt. Bei der Aufnahme Abb. 10 (F 38) erfolgte die Einstrahlung des Röntgenblitzes gegen Ende der Expansion entsprechend dem Punkt A in Abb. 8.

Sie zeigt also die primäre Ionenverteilung ($\tau = 0$). Das Photogramm in Abb. 13 zeigt eine Halbwertsbreite von 0,60 mm. Daraus ergibt sich nach Gl. (3) $b = 3,6 \cdot 10^{-2}$ cm. Auch bei Einstrahlungen bei 19, 18, 17 und 16 mm Kolbenhub ist von einer Diffusion nichts zu bemerken. Frühere Einstrahlung des Röntgenblitzes ergibt Nebelspuren, bei denen infolge der Diffusionen die Ionen zu einer Säule zusammengefloßen sind. Abb. 11 und Abb. 12 zeigen zwei solche Aufnahmen. Bei Abb. 11 erfolgte die Einstrahlung in Punkt B, bei Abb. 12 in Punkt C der Kurve Abb. 8c. Die Diffusionszeiten sind von dem Zeitpunkt, in dem der Hub 16 mm erreicht, ab zu messen, also vom Punkt 0 der Abb. 8c. Sie ergaben sich zu $\tau = 3,5 \cdot 10^{-3}$ sec und $\tau = 16,6 \cdot 10^{-3}$ sec. Nach Gl. (3) erhält man bei einem Diffusionskoeffizienten $D = 0,03 \text{ cm}^2 \cdot \text{sec}^{-1}$ im ersten Fall eine Halbwertsbreite von 0,72 mm, im zweiten Fall von 0,95 mm. Aus den entsprechenden Photometerkurven der Abb. 13 entnimmt man die Halbwertsbreiten 0,75 mm und 1,01 mm. Die Übereinstimmung von berechneten und gemessenen Werten ist also befriedigend. Daraus folgt, daß man in erster Näherung die Gl. (3) auf die Verbreiterung einer solchen Säule durch Diffusion anwenden kann, wenn man die Diffusionszeiten vom Zeitpunkt des Hubs 16 mm rechnet und einen Diffusionskoeffizienten einsetzt, der nur wenig kleiner als der Ionendiffusionskoeffizient in Luft unter Normalbedingungen ist (dem Betrage nach 0,03 gegenüber 0,034). Daraus lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

1. Bis zum Hub 16 entsprechend einer etwa 6fachen Übersättigung unterscheidet sich die Masse der Ionen größenordnungsmäßig nicht von der der monomolekularen Ionen.

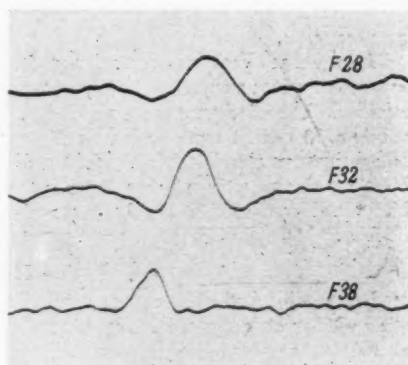


Abb. 13. Photometerkurven der Nebelspuraufnahmen F 38, F 32 und F 28 (7,4fach vergr.)

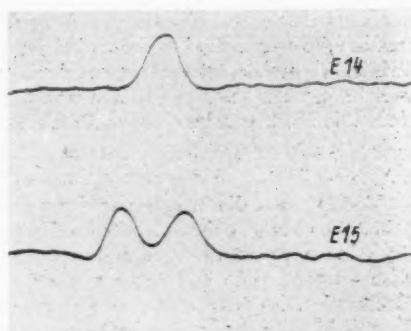


Abb. 17. Photometerkurven der Aufnahmen E 14 und E 15 (7,4fach vergr.)

2. Oberhalb dieser Übersättigung muß ihre Masse so groß geworden sein, daß praktisch keine Diffusion mehr erfolgt.

3. Oberhalb dieser Übersättigung sind die Ionen entweder zu Tröpfchen angewachsen, oder sie werden an der Tröpfchenbildung verhindert, da andernfalls bei Aufnahmen von der Art der Abb. 10 ein Tröpfchenschleier beobachtet werden müßte. Im Verein mit den Ergebnissen der folgenden Paragraphen ergibt sich daraus, daß an der Bildung scharfer Nebelspuren ausschließlich negative Ionen beteiligt sind.

Infolge ihres Vorsprungs vor den positiven Ionen reißen sie allen überschüssigen Wasserdampf an sich, so daß die positiven Ionen keine zur Tröpfchenbildung ausreichende Übersättigung mehr vorfinden. Aus den Photogrammen F 28 und F 32 der Abb. 13 ersieht man, daß auch die allgemeine Nebelbildung in der Nähe der Nebelspuren verhindert wird. Werden die positiven Ionen durch ein elektrisches Feld von den negativen getrennt, so führen sie natürlich ebenfalls zur Tröpfchenbildung. Doch scheint die Ausbeute hinter der bei negativen Ionen zurückzubleiben.

c) Die Wanderung der Ionensäulen

Entsprechend ihrer Fähigkeit zu diffundieren, zeigen die Ionen bis zu einer gewissen Übersättigung die Fähigkeit im elektrischen Feld zu wandern. Abb. 14 und Abb. 15 zeigen Nebelspuren, deren Ionen im gleichen Zeitpunkt und Übersättigungspunkt der Expansion erzeugt wurden. Während jedoch die Ionen der einen Säule (Abb. 14) nur der Diffusion unterlagen, wirkte auf die der anderen Säule (Abb. 15) gleichzeitig die Diffusion und das elektrische Feld. Man darf annehmen, daß sich beide Wirkungen unabhängig voneinander überlagern. Würden nun die verschiedenen Ionen eines Vorzeichens mit verschiedener Geschwindigkeit wandern, so würde die Ionensäule bei der Wanderung auseinandergezerrt werden. Tatsächlich beobachtet man aber an den Photometerkurven Abb. 17, daß die Halbwertsbreiten der unaufgespaltenen und der aufgespaltenen Säule einander gleich sind. Die Ionen wandern also praktisch alle mit gleicher Geschwindigkeit.

d) Die Aufspaltung der positiven Ionensäule

Verfolgt man die Wanderung der positiven Ionen bei höherer Übersättigung (Abb. 16), so zeigt sich, daß bei einer bestimmten Übersättigung ein Teil der positiven Ionen stehen bleibt, also von der spontanen Kondensation befallen wird, während der andere Teil weiter wandert, bis auch er schließlich zum Stehen gebracht wird. Es müssen also zwei Gruppen von positiven Ionen vorhanden sein, die sich in ihrer Beweglichkeit nur wenig unterscheiden, die aber bei verschieden hoher Übersättigung spontane Kondensation bewirken. Gruppen von positiven Ionen sind auch schon bei Beweglichkeitsmessungen festgestellt worden⁶⁾. Ob es sich dabei um eine besondere Modifikation oder um Verunreinigungen handelt, muß erst noch geklärt werden. Bei den negativen Ionen wurden solche Aufspaltungen bei keiner Aufnahme festgestellt.

VII. Die Ausmessung der Weg-Zeit-Kurve der Ionen und ihre Deutung

Auf den Aufnahmen, die eine Aufspaltung der Ionensäule im elektrischen Feld zeigen (z. B. Abb. 15), läßt sich direkt der Weg ausmessen, den die Ionen im elek-

⁶⁾ Handbuch der Physik, Bd. XXII/1, S. 412.

trischen Feld zurückgelegt haben. Da bei jeder einzelnen Aufnahme die Kolbenbewegung in der Form der Abb. 8 registriert wurde, sich ferner an Hand der im § 5 erwähnten Ringmarken der Zeitpunkt für die Anschaltung des elektrischen Feldes und für die Abschaltung des elektrischen Feldes unmittelbar aus dieser Kurve ablesen läßt, kennt man auch die Zeit, die die Ionen zu ihrer Wanderung gebraucht haben. Innerhalb einer Serie von etwa 40 Aufnahmen wurde nun unter Konstanthaltung aller übrigen Bedingungen die Zeit, während der das elektrische Feld eingeschaltet war, systematisch variiert. Trägt man die Wege, die die Ionensäulen bei den einzelnen Aufnahmen zurücklegten, als Funktion der Zeiten, die sie dafür benötigen, graphisch auf, so ergeben sich stets Kurven vom Typ der Abb. 18a. Man darf nun annehmen, daß eine solche Kurve zugleich die Bewegung einer einzelnen Ionensäule im dauernd eingeschalteten elektrischen Feld wiedergibt. Für jede Phase dieser Ionenwanderung kennt man aus den Registrierkurven Abb. 8 die Kolbenstellung und aus dieser mit Hilfe der Diagramme in Abb. 9 Expansionsverhältnis und Übersättigung. In Abb. 18a ist die so bestimmte Übersättigung ebenfalls angegeben. (Obere Skala.)

Es ist nun zunächst die Frage zu erklären, ob einer so bestimmten Kurve eine allgemeine Bedeutung zukommt, d. h. ob sie nicht von speziellen Versuchsbedingungen wie z. B. der Kolbengeschwindigkeit abhängt. Diese Frage ist gleichbedeutend mit der Frage, ob die Zeit, in der sich der Bewegungszustand der Ionen einstellt, klein ist, gegenüber den Zeiten, in denen nennenswerte Änderungen der Zustandsgrößen in der Nebelkammer erfolgen.

Zur Beantwortung dieser Frage wurden zwei verschiedene Aufnahmeserien J und N aufgenommen, von denen die erste (J) bei großen Kolbengeschwindigkeiten gemacht wurde, entsprechend dem Diagramm a der Abb. 8, während bei der anderen (N) mit geringen Kolbengeschwindigkeiten gearbeitet wurde, entsprechend dem Diagramm b in Abb. 8. Die so erhaltenen Weg-Zeit-Kurven wurden auf gleiche Zeiten und gleiche Feldstärken (60 Volt/cm) umgerechnet. Die Meßpunkte, die aus den beiden Serien für die negativen Ionen berechnet wurden, sind durch Kreise markiert, die der positiven Ionen durch Kreuze. Die Streuung der Werte für die negativen Ionen liegt innerhalb der Fehlergrenzen. Der Verlauf der Kurve (aus-

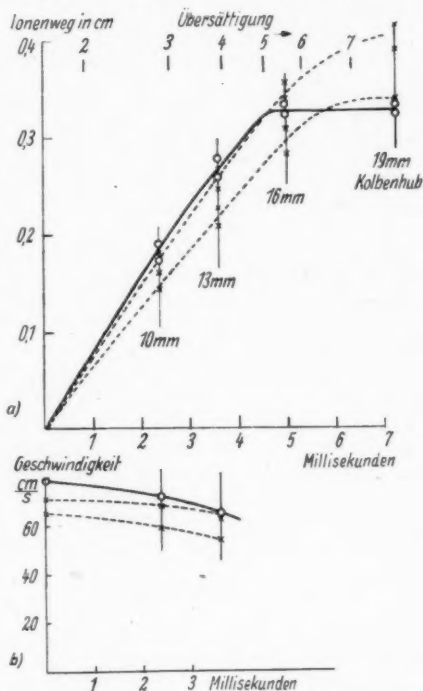


Abb. 18. a) Weg der Ionen im elektrischen Feld als Funktion der Zeit, b) Geschwindigkeit der Ionen als Funktion der Zeit (ausgezogene Kurven gelten für negative Ionen)

gezogene Kurve) ist also unabhängig von den speziellen Versuchsbedingungen einer Aufnahmeserie, insbesondere von der Kolbengeschwindigkeit.

Die Streuung der Werte, die den positiven Ionen entsprechen, ist etwas größer wie bei den negativen Ionen. Die Meßgenauigkeit wird hier vor allem durch die Aufspaltung der positiven Säule beeinträchtigt.

Sämtliche Kurven sind bis zur etwa 5fachen Übersättigung nur wenig gekrümmt. Bei höheren Übersättigungen knicken sie um und verlaufen dann ziemlich flach, die für die negativen Ionen verläuft sogar ziemlich genau waagrecht. Bis zu etwa 4facher Übersättigung lassen sie sich graphisch bequem differenzieren, d. h. es läßt sich für verschiedene Zeitpunkte (bzw. Übersättigungen) die Geschwindigkeit der Ionen ermitteln. Abb. 18 b zeigt das Ergebnis. Die ausgezogene Kurve zeigt den Geschwindigkeitsverlauf der negativen Ionen, die gestrichelten Kurven gelten für die positiven Ionengruppen.

Aus diesen Werten läßt sich für jeden Zeitpunkt, bzw. für jede Übersättigung die elektrische Beweglichkeit der Ionen bestimmen, d. h. das Verhältnis ihrer Geschwindigkeit zu dem Quotienten aus Feldstärke in Volt/cm und dem Druck in Atmosphären. Die Feldstärke ist während des ganzen Prozesses konstant (50 Volt/cm), der Druck in at ist dem Betrage nach gleich dem reziproken Wert des Expansionsverhältnisses, das für jeden Hub aus Abb. 9 entnommen werden kann. Es ergibt sich also

$$\text{Beweglichkeit } b = \frac{\text{Geschwindigkeit } u}{\text{Feldstärke } \mathcal{E} \cdot \text{Expansionsverhältnis } \frac{V}{V_0}}$$

Die so errechneten Beweglichkeiten für die Übersättigungen 2,8, 3,9 und 5,6 sind in Abb. 19 aufgetragen, diesmal bezogen auf die Übersättigung in der Nebel-

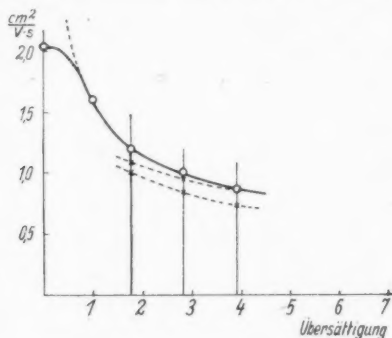


Abb. 19. Beweglichkeit der Ionen als Funktion der Übersättigung

kammer (ausgezogene Kurve gilt wieder für negative Ionen). Es ist anzunehmen, daß diese Werte ganz allgemein bei den betreffenden Übersättigungen auftreten, unabhängig davon, wie diese erzeugt werden. In das Diagramm Abb. 19 sind ferner die der Literatur entnommenen Werte für die Übersättigungen 0 und 1, d. h. für trockene und feuchtigkeitsgesättigte Luft eingetragen. Die gemessenen Werte

reihen sich in befriedigender Weise an die Tabellenwerte an. Dabei darf man annehmen, daß die Beweglichkeit für trockene Luft bei völlig reinen Versuchsbedingungen noch wesentlich höher ist, als der zur Zeit angegebene Tabellenwert.

Aus der elektrischen Beweglichkeit läßt sich ein Schluß auf den Radius der Ionen ziehen. Leider ist der genaue Zusammenhang zwischen Ionenradius und Beweglichkeit noch nicht bekannt. Der starke Unterschied in der Beweglichkeit der positiven Ionen und der negativen Ionen legt zudem die Vermutung nahe, daß die Beweglichkeit nicht nur vom Ionenradius allein abhängt. Wir begnügen uns deshalb mit der Berechnung von Relativwerten für negative Ionen. Zu diesem Zweck lassen wir der Beweglichkeit der negativen Ionen in feuchtigkeitsgesättigter Luft mit dem Tabellenwert $b = 1,6 \frac{\text{cm}^2}{\text{V} \cdot \text{s}}$ einen Ionenradius entsprechen, der sich aus der Thomson-Volmerschen Gleichung zu $3 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ ergibt.

Zur theoretischen Berechnung der übrigen Ionenradien verwenden wir die Formel von Langevin

$$b = \frac{e \lambda}{m w}, \text{ wo } e = \text{Elementarladung}$$

$\lambda =$ mittlere freie Weglänge

$m =$ Masse der Ionen

$w =$ mittlere Geschwindigkeit der Ionen

bedeutet. Damit für $r = 3 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ die beobachtete Beweglichkeit von $b = 1,6 \text{ cm}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}$ herauskommt, muß mit dem Faktor 0,9 multipliziert werden, so daß

$$b = 0,9 \cdot \frac{e \cdot \lambda}{m \cdot w}$$

wird. (Soll die Beweglichkeit in $\text{cm}^2/\text{V} \cdot \text{s}$ herauskommen, so muß außerdem noch durch 300 dividiert werden, wenn bei der Berechnung CGS-Einheiten verwendet

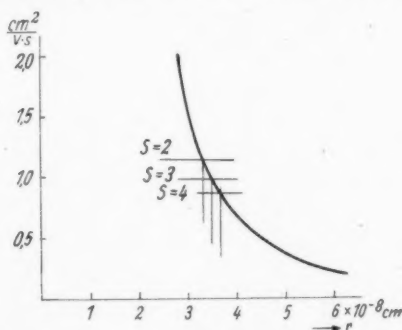


Abb. 20. Beweglichkeit als Funktion des Radius (nach Langevin berechnet)

wurden.) Für die verschiedenen Ionenradien ergeben sich dann die in Abb. 20 eingezeichneten Beweglichkeiten. Mit Hilfe dieses Diagramms läßt sich jedem Beweglichkeitswert der Abb. 19 ein Tröpfchenradius zuordnen. Die so erhaltenen

Radien sind in Abb. 21 als Funktion der Übersättigung aufgetragen. In dieser Abbildung ist ferner die Wachstumskurve für Ionen nach Volmer eingezeichnet. Die aus der Messung gewonnenen Werte liegen praktisch auf dieser Kurve.

Dieses Ergebnis ist allerdings nur dadurch erzielt worden, daß man von vornherein von einem Punkt der Kurve ausging. Ferner ist eine Beweglichkeitsformel verwendet worden, die keineswegs allgemein anerkannt ist. Im Hinblick auf die Tatsache, daß der Begriff des Ionenradius hier keineswegs eindeutig festgelegt ist, ist jedoch eine andere Form der Prüfung gar nicht möglich. Als Ergebnis unserer Messung formulieren wir deshalb: Die aus den Beweglichkeitsmessungen in der Wilsonschen Nebelkammer erhaltenen Ionenradien für negative Ionen stimmen mit den auf Grund der Thomson-Volmerschen Theorie berechneten überein,

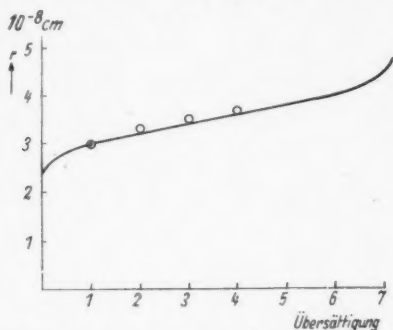


Abb. 21. Ionenradius als Funktion der Übersättigung (nach Volmer berechnet). Eingezeichnete Punkte aus Messungen abgeleitet

wenn man sie nach der Beweglichkeitsformel von Langevin mit dem Faktor 0,9 berechnet, also $b = 0,9 \cdot \frac{e\lambda}{m \cdot w}$.

Bei den positiven Ionen läßt sich ein solcher Zusammenhang nicht angeben. Einerseits hat Volmer seine Kurve nur für Ionen schlechthin berechnet. (Man darf vermuten, daß sie für negative Ionen gilt.) Andererseits scheint für positive Ionen auch kein übersichtlicher Zusammenhang zwischen Beweglichkeit und Radius vorzuliegen. In Übereinstimmung mit den Tabellenwerten ergeben auch die hier vorliegenden Messungen eine geringere Beweglichkeit der positiven Ionen gegenüber der der negativen Ionen.

VIII. Die Bestimmung der kritischen Übersättigung

Nach der Thomsonschen Theorie und nach der verbesserten Theorie von Volmer tritt bei einer ganz bestimmten Übersättigung Keimbildung und damit spontane Kondensation an Ionen auf. Bei unseren Versuchen bedeutet das, daß von dieser Übersättigung ab die elektrische Beweglichkeit praktisch gleich 0 wird. Tatsächlich beobachtet man auch z. B. in der graphischen Darstellung Abb. 18 für negative Ionen, daß von einer bestimmten Übersättigung ab die Weg-Zeit-Kurve parallel zur Abszisse verläuft. Der nur schwach gekrümmte Verlauf des aufsteigenden Astes der Kurve erlaubt diese „kritische“ Übersättigung als Schnitt

dieser
zeichnet.

vorn-
formel
auf die
gelegt ist,
unserer
in der
immen
berein,

anet).

tor 0,9

geben.
(Man
positive
t und
n auch
Ionen

ie von
damit
s, daß
wird.
bb. 18
g-Zeit-
uf des
Schnitt

mi
sic
läf

bli
Hu
un
De
wie
neg
Zu
lau

A

Üb
der
sch
die

Üb
so
Üb
ric
ab
ein
bet

wi
sio
Ih
Ku

mit dem waagrechten Teil der Kurve ziemlich genau zu bestimmen. Sie ergibt sich für negative Ionen zu $5,3 \pm 0,15$. Aus den Kurven für positive Ionen in Abb. 18 läßt sich kein genau definierter Wert entnehmen.

Genauere Werte erhält man aus einer Aufnahmeserie, bei der der Röntgenblitz erst nach 11 mm Hub und die Anschaltung des elektrischen Feldes bei 13 mm Hub erfolgt ist. Das Ergebnis dieser Serie ist in Abb. 22 dargestellt. Die Steigung und Krümmung der Kurven im Ausgangspunkt sind aus Abb. 18 entnommen. Der Schnitt des aufsteigenden Asts der Kurve mit dem waagrechten Ast ergibt wiederum die Übersättigung, bei der die spontane Kondensation erfolgt. Bei den negativen Ionen ergibt sich der Wert $5,28 \pm 0,1$. Bei den positiven Ionen ist die Zuordnung der aus Abb. 18 gewonnenen aufsteigenden Äste zu den waagrecht verlaufenden Ästen nicht eindeutig. Die wahrscheinlichste Zuordnung ergibt die

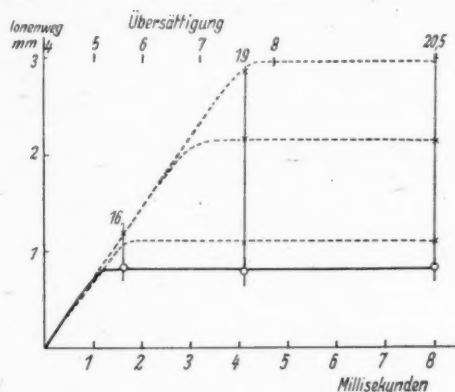


Abb. 22. Wanderung der Ionen im elektrischen Feld bei hohen Übersättigungen

Übersättigungswerte 5,9, 6,2 und 6,8, entsprechend einer 3fachen Aufspaltung der positiven Säule. Da die Ausmessung der einzelnen Ionensäulen hier sehr schwierig ist, verdienen jedoch diese Werte nicht dasselbe Vertrauen, wie der für die negativen Ionen gewonnene Wert.

Wir wollen uns deshalb in der weiteren Diskussion auf die gemessene „kritische“ Übersättigung für die negativen Ionen beschränken. Zunächst fällt auf, daß die so gemessene „kritische“ Übersättigung sehr stark abweicht von der „kritischen“ Übersättigung $S = 4,1$, die von anderen Autoren gemessen, von Volmer als richtig angenommen und rechnerisch begründet wurde. Die Diskrepanz löst sich aber sofort auf, wenn man die Vorgänge bei der Wanderung der Ionensäule in einem kleinen Zeitintervall kurz vor und kurz nach dem Einsatz der Keimbildung betrachtet (Abb. 24).

Während der Expansion der Nebelkammer, also bei steigender Übersättigung, wird plötzlich eine Ionensäule erzeugt. Sie verbreitert sich allmählich durch Diffusion, bleibt aber im übrigen stehen, bis das elektrische Feld eingeschaltet wird. Ihre Ionenverteilung in diesem Augenblick ist in Abb. 24 durch die gestrichelte Kurve wiedergegeben. Dann wandert sie im Feld mit fast gleichbleibender Ge-

schwindigkeit. Während dieser Wanderung nimmt nun die Übersättigung und damit die Keimbildungshäufigkeit dauernd zu. Abb. 23 (Kurve für $\varepsilon = 1,85$) zeigt den nach Volmer berechneten Logarithmus der Keimbildungshäufigkeit als Funktion der Übersättigung. In Abb. 24a sind die Keimbildungszahlen für den betrachteten Vorgang als Funktion der Zeit ausgerechnet. Die

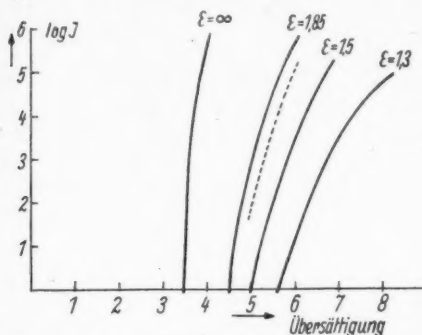


Abb. 23. \log der Keimbildungshäufigkeit als Funktion der Übersättigung (nach Volmer berechnet)

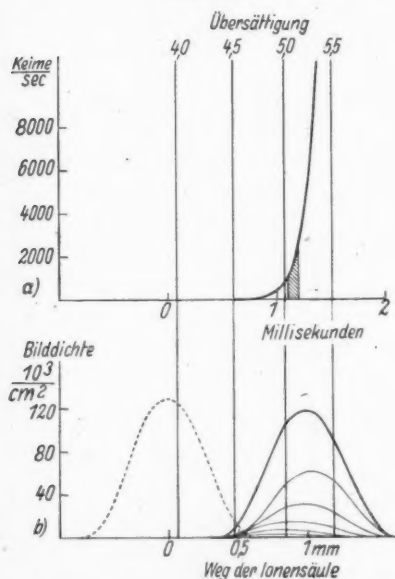


Abb. 24. a) Keimbildungshäufigkeit als Funktion der Übersättigung, b) Anfangsstellung (gestrichelt) und Endstellung (ausgezogen) der negativen Ionsäule im elektrischen Feld

Integration über jedes Zeitintervall ergibt denjenigen Teil der Ionen, die in diesem Zeitintervall von der spontanen Kondensation befallen werden und stehen bleiben. Die gebildeten Tröpfchen haben natürlich wieder eine glockenkurvenförmige Verteilung. In Abb. 24b sind für verschiedene Wegintervalle die Ionenmengen, die in jedem Wegintervall stehen geblieben sind, in der entsprechenden Verteilung eingezeichnet. Der Prozeß geht so lange vor sich, bis alle Ionen zum Stillstand gekommen sind. Im weiteren Verlauf der Expansion verlassen diese beschwerten Ionen trotz des weiter wirkenden elektrischen Feldes nicht mehr ihren Ort und wachsen zur sichtbaren Größe an. Auf dem photographischen Film beobachtet man also eine Ionenverteilung, die sich als Überlagerung der während der einzelnen Wegintervalle gebildeten Tröpfchenverteilungen ergibt. Es ist die durch die dick ausgezogene Kurve dargestellte Verteilung. Ihr auf die angegebene Weise graphisch ermitteltes Maximum liegt bei einer Übersättigung von $5,28 \pm 0,10$. Man erhält also innerhalb der Fehlergrenzen Übereinstimmung. Es ist dies eine Bestätigung der Volmerschen Theorie der „kritischen“ Übersättigung.

Für die Praxis der Nebelkammer ist allerdings die von Volmer definierte „kritische“ Übersättigung nicht entscheidend. Dafür gilt ein Übersättigungsgrad, der auf Grund der Forderungen berechnet werden kann, die an eine

gute Nebelspuraufnahme gestellt werden. Von einer guten Nebelspuraufnahme, z. B. eines Alpha-Teilchens verlangt man eine gewisse Schärfe. Blackett hat bei seinen berühmten Aufnahmen Nebelspurbreiten von 0,03 mm gemessen. Auf Grund gewisser experimenteller Bedingungen errechnet er für derartige Aufnahmen eine Spurbreite von

$$2x = 4,68 \cdot \sqrt{D\tau},$$

wobei für den Diffusionskoeffizienten $D = 0,034 \text{ cm}^2 \cdot \text{sec}^{-1}$ eingesetzt wurde. (Der Faktor 4,68 vor der Wurzel gilt an und für sich für zählrohrgesteuerte Aufnahmen; bei den normalen Aufnahmen dürfte er noch wesentlich höher sein. Siehe M. Pollermann, Z. Physik **126**, 271 (1949)). Daraus ergibt sich als obere Grenze für

$$\tau = 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ sec.}$$

Fordert man ferner, daß sämtliche Ionen Tröpfchenbildung bewirken, so benötigt man eine Keimbildungshäufigkeit von $J = 0,8 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ ($\log J = 4,9$). Aus Abb. 23 ersieht man, daß dafür eine Übersättigung von 5,7 entsprechend einem Expansionsverhältnis von 1,3 erforderlich ist. Diese Übersättigung bezeichnet man am besten als „praktische Übersättigung“. Tatsächlich arbeitet man bei Verwendung von Wasserdampf-Luft-Gemisch gerade mit dieser Übersättigung.

Berücksichtigt man die im § 7 gewonnenen Erkenntnisse, so folgt, daß bei solchen Nebelspuraufnahmen die positiven Ionen nicht mitwirken, denn in diesem Falle wären bei einem Expansionsverhältnis von 1,3 scharfe Nebelspuren nicht zu erwarten.

IX. Zusammenfassung

Nach einer neuen Methode werden während der Expansion einer Wilsonschen Nebelkammer kontinuierliche Messungen der elektrischen Beweglichkeit ausgeführt. Ihre Auswertung führt zu folgenden Ergebnissen:

1. Bis zum Einsatz der spontanen Kondensation wachsen die Ionen bei zunehmender Übersättigung entsprechend der Theorie von Thomson in der verbesserten Form von M. Volmer an und zwar ergeben sich die Tröpfchenradien in Übereinstimmung mit der Theorie, wenn man sie aus der Beweglichkeit auf Grund der Formel von Langevin mit dem Faktor 0,9 berechnet, also

$$b = 0,9 \frac{e\lambda}{m w}.$$

2. Der Einsatz der spontanen Kondensation, d. h. die Bildung von sichtbaren Tröpfchen erfolgt bei zunehmender Übersättigung mit einer Häufigkeit, wie man sie auf Grund der schwankungstheoretischen Überlegungen von M. Volmer erwarten muß. Die zur Herstellung von scharfen Nebelspuren notwendige „praktische“ Übersättigung läßt sich berechnen und ergibt sich zu 5,7.

3. Der Vorzeicheneffekt, d. h. die Tatsache, daß die kritische Übersättigung für positive Ionen größer ist als die für negative Ionen, wird bestätigt. Diskrepanzen in den Messungen anderer Autoren können auf die Tatsache zurückgeführt werden, daß bei positiven Ionen Gruppen mit verschiedenen kritischen Übersättigungen auftreten können. Auch bei den höchsten erreichbaren Übersättigungen

unterhalb der Nebelgrenze erreicht die Tröpfchenausbeute noch nicht die Ausbeute, die an negativen Ionen erzielt wird. Es wird gezeigt, daß mit einer Mitwirkung der positiven Ionen bei der Bildung scharfer Nebelspuren von stark ionisierenden Teilchen nicht zu rechnen ist. Jedes Ionenpaar vermag hier nur ein einziges Tröpfchen zu bilden.

Die vorliegende Arbeit wurde in den Jahren 1947 und 1948 im Physikalisch-chemischen Institut der KWG in Berlin-Dahlem (Abtlg. Physikalisches Institut der Universität) durchgeführt. Herrn Prof. Gerthsen und Herrn Prof. Stranski bin ich für mannigfache Förderung zu großem Dank verpflichtet. Besondere Anerkennung gebührt den Handwerkern des Institutes, vor allem den Feinmechanikern unter Meister Schulz für ihre präzise Arbeit beim Bau der Apparatur.

Karlsruhe, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Bei der Redaktion eingegangen am 14. August 1949.)

I
auf V
zwis
durch
schie
Ozon
Misch
zu K
der v
Sauer
2 Ge
wass
für I
schri
(21),
biete
diese
tion
Flan
mäß
Glei
wird
gänz
Duro
gleic
gleic
bis a
(§ 5)
anal
schie
für
gleic
oder
tisch
sam
 $\epsilon >$
nich
liche
der
Cycl

Zur Theorie der Verbrennungsgeschwindigkeit. II

Reaktion zwischen ungleichen Teilchen, Kohlenwasserstoffverbrennung

Von Karl Bechert

(Mit 1 Abbildung)

Inhaltsübersicht

Das in der Arbeit I¹⁾ entwickelte theoretische Schema kann, wie dort schon angegeben, auf Verbrennungen und Reaktionen angewendet werden, bei denen die Bruttoreaktion zwischen ungleichen Molekülen stattfindet. In der vorliegenden Arbeit wird die Methode durch Anwendung auf die Kohlenwasserstoffverbrennung in Luft erläutert. Der Unterschied gegenüber den Reaktionen zwischen gleichen Teilchen, die in I am Beispiel der Ozonverbrennung erläutert worden sind, besteht darin, daß es eine stöchiometrische Mischung gibt, welche bei der Kohlenwasserstoffverbrennung der völligen Umsetzung zu Kohlensäure und Wasser entspricht. Unterhalb des stöchiometrischen Punktes wird der vorhandene Brennstoff in der Reaktionszone ganz umgesetzt, oberhalb der vorhandene Sauerstoff, so wird die Verbrennung schematisiert. Deshalb hat der Energiesatz für die 2 Gebiete verschiedene Form (12a, b), § 2. Aus den Bindungsenergien für die in den Kohlenwasserstoffen vorkommenden Bindungen wird die gesamte molare Bindungsenergie Q' für Paraffine, Cycloparaffine, Olefine in Abhängigkeit von der Kohlenstoffzahl α hingeschrieben, Gln. (17), § 2. Aus den Erhaltungssätzen folgen die Differentialgleichungen (21), § 2 für die Brennstoffteilchenzahl bzw. die Sauerstoffteilchenzahl in den Gebieten des Luftüberschusses ($\epsilon \leq 1$) und Brennstoffüberschusses ($\epsilon \geq 1$). Sie haben dieselbe Form und gehören zu denselben Randbedingungen wie beim Problem der Reaktion zwischen gleichen Teilchen. Nach dem in I gegebenen Verfahren lassen sich die Flammengeschwindigkeit u , und die Breite Δx der Reaktionszone in ihrer dimensionsmäßigen Form, und damit ihre Abhängigkeit von den physikalischen Größen aus den Gleichungen des Problems ablesen (§ 3). Für die Zahl Z der zur Reaktion führenden Stöße wird der Ansatz für Zweierstöße gemacht, (24), § 3. In den folgenden Paragraphen Ergänzung der dimensionsmäßigen Schlüsse durch Berechnung des dimensionslosen Faktors. Durch Einführen geeigneter Bezeichnungen und Veränderlichen werden die Differentialgleichungen für $\epsilon \leq 1$ und $\epsilon \geq 1$ formal mathematisch identisch (§ 4), können also zugleich gelöst werden. Die Integralkurven dieser Differentialgleichung (42), § 4 haben bis auf eine kleine Verschiedenheit im Verlaufe der Hilfskurve B dieselbe Form wie in I (§ 5). Nach dem in I beschriebenen Verfahren kann die Flammengeschwindigkeit u , in analytischer Form berechnet werden, (48), § 6. Theoretisch ist der Temperaturunterschied zwischen Verbranntem (Temperatur T_v) und Unverbranntem (T_u) näherungsweise für die hier betrachteten Kohlenwasserstoffe bei gleicher Gemischzusammensetzung gleich, wobei die Gemischzusammensetzung in den theoretischen Größen ϵ (für $\epsilon \leq 1$) oder δ (für $\epsilon \geq 1$) zu messen ist (§ 6). $T_v - T_u$ steigt für $\epsilon < 1$ ziemlich rasch und praktisch linear mit steigendem ϵ an bis zum stöchiometrischen Punkt, und nimmt dann langsam und wieder praktisch linear mit steigendem ϵ ab. Mißt man den Abstieg im Gebiet $\epsilon > 1$ in δ statt ϵ , so ist er ebenso steil wie der Anstieg in ϵ im Gebiet $\epsilon < 1$ (§ 2). Bei nicht zu großer Änderung der Temperatur T_u im Unverbrannten ändert sich u , im wesentlichen proportional zu T_u (§ 6). Eine Zusammenstellung der Formeln für die Berechnung der Flammengeschwindigkeiten, Temperaturen, Verbrennungswärmen für Paraffine, Cycloparaffine, Olefine geben die Gln. (56a–57e), § 6. Erläuterung am Fall des Hexans,

¹⁾ Ann. Physik (6) 4, 191 (1949).

Tabelle 3, § 5; die Größenordnung der Flammengeschwindigkeit und ihre qualitative Abhängigkeit von der Gemischzusammensetzung kommen richtig heraus. Allgemein steigt die Flammengeschwindigkeit im Gebiet des Luftüberschusses ($\epsilon < 1$) mit steigendem Brennstoffzusatz, der Anstieg hält über den stöchiometrischen Punkt ($\epsilon = 1$) bis ins Gebiet des Brennstoffüberschusses ($\epsilon > 1$) an; nach Überschreiten des Maximums in diesem Gebiet fällt u_f ab, (§ 6). Die Dicke der Reaktionszone ergibt sich zu etwa 10^{-2} cm bei Normalbedingungen im Unverbrannten und einer Gemischzusammensetzung, welche möglichst großer Flammengeschwindigkeit entspricht, § 7. Durch eine einfache physikalische Betrachtung wird gezeigt, daß theoretisch die Zündgrenzen für die hier betrachteten Kohlenwasserstoffe praktisch gleich sein müssen, wenn man sie in ϵ für die untere Zündgrenze, und in δ für die obere ausdrückt. Dies entspricht der Erfahrung. Es ergeben sich theoretisch (§ 7): 1. die unteren Zündgrenzen bis auf wenige Prozent quantitativ richtig (Tabelle 4, § 6), 2. die empirisch schon vorher bekannte Regel, daß der Heizwert Q' eines Kohlenwasserstoffs, mit der Gemischzusammensetzung bei der unteren Zündgrenze multipliziert, unabhängig von der Kohlenwasserstoffart denselben Wert hat, 3. daß eine ähnliche Regel auch für die obere Zündgrenze gilt, 4. daß eine weitere aus Q' gebildete Größe für die hier betrachteten Kohlenwasserstoffe praktisch gleich ist, 5. daß T_r gut konstant ist für die untere Zündgrenze, weniger gut für die obere, 6. daß, wie gesagt, ϵ für die untere, und δ für die obere Zündgrenze bei den betrachteten Kohlenwasserstoffen sehr genau denselben Wert haben. Die Regeln sind nicht auf die hier betrachteten Kohlenstoffverbindungen beschränkt. — An der unteren Zündgrenze ist die Dicke der Reaktionszone von der Größenordnung 1 cm (§ 7). — Nach dem in I und II verwendeten Verfahren können auch andere Verbrennungen behandelt werden.

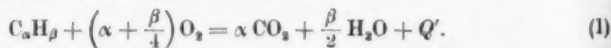
§ 1. Einleitung

Im ersten Teil dieser Arbeit²⁾ ist ein Schema angegeben worden, nach dem Verbrennungsgeschwindigkeiten (Flammengeschwindigkeiten) für stationär in brennbaren Gemischen wandernde Flammen analytisch oder numerisch berechnet werden können. Nachdem die Erhaltungssätze für die Verbrennung angeschrieben waren, wurde die Rechnung der vorangehenden Arbeit auf die Reaktion zwischen zwei gleichen Reaktionspartnern beschränkt. Im jetzigen zweiten Teil soll der wichtige Fall der Reaktion zwischen ungleichen Molekülen behandelt werden. Gedanklich ändert sich dabei nur wenig, die Formeln und der Rechengang sind nur in einigen Einzelheiten anders, die physikalischen Ergebnisse aber sind recht deutlich verschieden: Es gibt bei diesen Verbrennungen einen stöchiometrischen Punkt, die Flammengeschwindigkeit nimmt nicht ständig zu mit wachsendem Brennstoffzusatz, sondern geht über ein Maximum und nimmt dann wieder ab.

Unverändert bleiben die Betrachtungen von I § 2 [in Gleichung (11) dort ist ein Druckfehler: Es muß rechts im Nenner κ_1 heißen, nicht κ_2], also auch die Aussagen über die obere Grenze der Verbrennungsgeschwindigkeit und die untere Grenze der Detonationsgeschwindigkeit für stationär wandernde Flammen. Um die Methode zu zeigen, entwickeln wir das Rechenschema für die Verbrennung eines beliebigen Kohlenwasserstoffs der Formel C_nH_β in Luft.

§ 2. Das Gleichungsschema zur Berechnung der Flammengeschwindigkeit

Als Bruttoreaktion für die Verbrennung des Kohlenwasserstoffes nehmen wir Verbrennung zu Kohlendioxyd und Wasser an³⁾.



²⁾ Karl Bechert, Ann. Physik (6) 4, 191 (1949); im folgenden als Arbeit I zitiert. Ein Bericht über die Ergebnisse und Grundgedanken erschien im „Sommerfeldheft“ der Z. Naturforsch. 3a, 584 (1948).

³⁾ Kritische Bemerkungen dazu siehe nach Gl. (12b).

Ist mehr als die stöchiometrische Molmenge $\alpha + \frac{\beta}{4}$ an O_2 im Unverbrannten vorhanden, so sagen wir: es besteht „Sauerstoffüberschuß“, bei Verbrennung in Luft also „Luftüberschuß“, ist weniger O_2 vorhanden, so besteht „Brennstoffüberschuß“. Q' ist die Reaktionswärme pro Mol Brennstoff.

n_1 nennen wir die Zahl der Brennstoffmoleküle im cm^3 , n_2 die der O_2 -Moleküle; Z sei die Zahl der Bruttoreaktionen pro cm^3 und sec, u die Strömungsgeschwindigkeit des Gases. Der Vorgang wird als eindimensional (kartesische Koordinate x) und stationär beschrieben. Die Diffusion berücksichtigen wir summarisch (wie in I) durch geeignete Wahl der Aktivierungsenergie E . Die dimensionsmäßige Form des Ergebnisses für die Flammengeschwindigkeit würde sich nicht ändern, wenn wir die Diffusion streng berücksichtigen würden; das läßt sich mit dem in I angegebenen Verfahren (S. 219–222) leicht zeigen.

Es gilt für die Abnahme der Brennstoffteilchenzahl infolge der Reaktion:

$$-\frac{d(n_1 u)}{dx} = Z; \quad (2)$$

denn bei jeder Reaktion verschwindet ein Brennstoffmolekül.

Der Energiesatz lautet in integrierter Form, wenn wir die Reibung vernachlässigen und die Massenerhaltung

$$\varrho u = \varrho_l u_l \quad (3)$$

und die Gasgleichung

$$p = \frac{\varrho R T}{M} \quad (4)$$

einsetzen:

$$\varrho_l u_l \left(\int_{T_l}^T c_v dT + \frac{u^2 - u_l^2}{2} + \frac{R T}{M} - \frac{R T_l}{M_l} \right) = \lambda \frac{dT}{dx} - \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right)_{T=T_l} - q' (n_1 u - n_{1l} u_l); \quad (5)$$

im letzten Ausdruck ist Gl. (2) benützt worden. Die Umrechnung ist schon in I (32) angegeben. Die Bezeichnungen sind dieselben wie dort: ϱ ist die Dichte der Gasmischung, c_v die spezifische Wärme bei konstantem Volumen, T die absolute Temperatur, R die Gaskonstante, M das Molekulargewicht, $q' = \frac{Q'}{L}$ ist die Reaktionswärme pro Molekül Brennstoff, L die Loschmidtsche Zahl, λ die Wärmeleitfähigkeit; der Index l bezieht sich auf einen beliebig gewählten Punkt x im Unverbrannten, u_l ist die Flammengeschwindigkeit. Wie bei der Ozonverbrennung gilt, daß das Glied $\frac{u^2 - u_l^2}{2}$ gegenüber den anderen zwei in der Klammer gestrichen werden kann. Das Verbrannte kennzeichnen wir durch den Index r und beschreiben es wie in I durch die Bedingung, daß die Reaktion im Verbrannten vollständig abgelaufen sein soll; die physikalischen Größen sind dann in diesem Gebiet räumlich konstant. Im Unverbrannten ist die Temperatur zwar nicht genau konstant, aber so wenig veränderlich, daß der Ausdruck $\left(\lambda \frac{dT}{dx} \right)_{T=T_l}$ für Zahlenrechnungen vernachlässigt werden kann, (vgl. I, § 6).

Wir wenden (5) auf $T = T_r$ an und haben

$$\varrho_l u_l \left(\int_{T_l}^{T_r} c_v dT + \frac{R T_r}{M_r} - \frac{R T_l}{M_l} \right) = q' (n_{1l} u_l - n_{1r} u_r). \quad (6)$$

Für die Klammer auf der linken Seite von (5) oder (6) kann man die Umformung benutzen:

$$\int_{T_i}^T c_p dT + \frac{RT}{M} - \frac{RT_i}{M_i} = \bar{c}_p (T - T_i), \quad (7)$$

wo \bar{c}_p ein geeigneter Mittelwert der spezifischen Wärme bei konstantem Druck ist.

Für die Abnahme der O_2 -Moleküle gilt gemäß der Bruttoreaktion (1):

$$-\frac{d(n_2 u)}{dx} = \left(\alpha + \frac{\beta}{4}\right) \cdot Z; \quad (8)$$

das gibt wegen (2):

$$\left(\alpha + \frac{\beta}{4}\right) (n_1 u - n_{1l} u_l) = n_2 u - n_{2l} u_l. \quad (9)$$

Für Sauerstoffüberschuß (Luftüberschuß) ist:

$$n_{2l} > \left(\alpha + \frac{\beta}{4}\right) n_{1l}; \quad (10a)$$

in diesem Fall wird der Brennstoff völlig in der Flamme verbraucht, und wir können daher setzen: $n_{1r} = 0$. Für das Verhältnis des Brennstoffpartialdruckes zum Gesamtdruck, im Unverbrannten, führen wir die Bezeichnung ein:

$$\frac{n_{1l}}{n_l} = \sigma; \quad (11)$$

die Gl. (6) gibt dann:

$$T_r - T_l = \frac{q' n_{1l}}{\varrho_l \bar{c}_p} = \frac{Q' n_{1l}}{n_l M_l \bar{c}_p} = \frac{Q' \sigma}{M_l \bar{c}_p}; \quad (12a)$$

n_l ist die Gesamtmolekühlzahl pro cm^3 im Unverbrannten.

Für Brennstoffüberschuß ist:

$$n_{2l} < \left(\alpha + \frac{\beta}{4}\right) n_{1l}; \quad (10b)$$

hier wird der Sauerstoff völlig in der Flamme verbraucht und wir setzen: $n_{2r} = 0$. Ist im Unverbrannten neben Brennstoff nur Sauerstoff vorhanden, so gilt:

$\frac{n_{2l}}{n_l} = 1 - \sigma$. Sind außer Sauerstoff noch Gase vorhanden, die sich an der Reaktion

nicht beteiligen, wie der Stickstoff bei Verbrennungen in Luft, so setzen wir für das Verhältnis des Partialdruckes einer solchen inerten Gasbeimischung zum Partialdruck des Sauerstoffes im Unverbrannten die Abkürzung η und haben für diesen allgemeinen Fall:

$$n_l = n_{1l} + n_{2l} (1 + \eta); \quad \frac{n_{2l}}{n_l} = \frac{1 - \sigma}{1 + \eta}. \quad (13)$$

Für das stöchiometrische Mischungsverhältnis σ_s gemäß der Reaktionsformel (1) gilt offenbar wegen (11):

$$\sigma_s = \frac{1}{1 + \left(\alpha + \frac{\beta}{4}\right) (1 + \eta)}, \quad (14)$$

und deshalb allgemein:

$$\frac{n_{2l}}{n_l \left(\alpha + \frac{\beta}{4}\right)} = \frac{(1 - \sigma) \sigma_s}{1 - \sigma_s}. \quad (15)$$

So wird aus (6) wegen (9):

$$T_r - T_i = \frac{q' n_{2i}}{c_i \bar{c}_p \left(\alpha + \frac{\beta}{4} \right)} = \frac{Q' (1 - \sigma) \sigma_i}{(1 - \sigma_s) M_i \bar{c}_p} \quad (12b)$$

Für $\sigma = \sigma_s$ wird (12a, b) identisch; im stöchiometrischen Punkt ist sowohl $n_{1r} = 0$ als auch $n_{2r} = 0$.

Für Verbrennung von Octan C_8H_{18} in Luft ist: $\alpha = 8$, $\beta = 18$, $\eta = \frac{79}{21} = 3,76$, $\sigma_s = \frac{1}{60,5}$; allgemein ist bei den üblichen Verbrennungen $\sigma_s \ll 1$.

Wir machen ausdrücklich darauf aufmerksam, daß bei unseren Betrachtungen die Bruttoreaktionsgleichung (1) vor allem zur Erläuterung dient. Bei nicht zu hohen Temperaturen im Gebiet mäßigen Brennstoffzusatzes wird zwar bei der Verbrennung im wesentlichen wirklich CO_2 und H_2O entstehen. In der Nähe der stöchiometrischen Mischung und im Gebiet des Brennstoffüberschusses wird aber für die Zusammensetzung im Verbrannten das Wassergasgleichgewicht eine Rolle spielen, es werden CO , H_2 in merklicher Menge im Verbrannten vorhanden sein. Die Gl. (1) benutzen wir vor allem dazu, den Begriff stöchiometrischer Mischung so festzulegen, wie es üblich ist; wir meinen damit eine Mischung, die nach den Molverhältnissen vollständig zu CO_2 und H_2O verbrennen könnte, wobei also O_2 in der durch die Gl. (1) geforderten Menge im Unverbrannten vorhanden sein soll. Unter q' verstehen wir allgemein die Wärmemenge, die pro Molekül Brennstoff bei der Verbrennung frei wird, unter Q' die entsprechende Wärmemenge pro Mol Brennstoff. \bar{c}_p ist nach (7) selbst von T abhängig; kennt man die Abhängigkeit von c_p von der Temperatur, so kann man \bar{c}_p berechnen und (7) auf $T = T_r$ anwenden. Einsetzen in (12a) oder (12b) gibt dann T_r . Es ist aber meist bequemer, T_r mit Hilfe von Tabellenwerken zu bestimmen, z. B. aus den Tabellen von Justi⁴⁾; das Verfahren beruht auf dem Energiesatz und ist bei Jost⁵⁾ angegeben.

Die Hauptabsicht unserer Arbeit ist, qualitative und größenordnungsmäßige Ergebnisse zu finden.

Wir werden uns also um die genaue Bestimmung von T_r nicht kümmern. Bei der Anwendung der Gln. (12a, b) ist zu beachten, daß für (12a) vorausgesetzt ist: $n_{1r} = 0$, daß der Brennstoff also völlig in der Flamme verbraucht wird. Für (12b) ist $n_{2r} = 0$ vorausgesetzt; der Sauerstoff soll ganz in der Flamme verschwinden. Q' bleibt genau genommen nicht konstant, wenn man den Brennstoffgehalt σ im Unverbrannten durch den ganzen Wertebereich 0 bis 1 von σ ändert. Vielmehr wird Q' bei erheblichem Brennstoffüberschuß im wesentlichen durch die Verbrennung zu CO und H_2 und Dissoziation bestimmt sein. Für größenordnungsmäßige und qualitative Schlüsse werden wir aber Q' als Konstante behandeln können.

Bei Verbrennungen von Kohlenwasserstoffen in Luft kann man $M_i c_p$ durch einen geeigneten Mittelwert ersetzen, weil M_i und c_p dann nur einige Prozent größer sind als die entsprechenden Größen für Luft. Zur Abschätzung der Größenordnung setzen wir:

$$M_i \approx 30 \text{ gr}; \quad c_p \approx 0,33 \frac{\text{cal}}{\text{gr grad}} \quad (16)$$

Für die Verbrennung von Kohlenwasserstoffen kann man Q' aus den Tabellen von Jost und Justi berechnen. Die Bindungsenergien sind in Cal pro Mol:

⁴⁾ E. Justi, Spezifische Wärme, Enthalpie, Entropie und Dissoziation technischer Gase, Springer, Berlin 1938.

⁵⁾ W. Jost, Explosions- und Verbrennungsvorgänge in Gasen, Springer-Verlag, Berlin 1939, S. 222–227.

Tabelle 1
Bindungsenergien (in Cal pro Mol)

$O_2 \rightarrow 2 O$	117,35	$H_2 \rightarrow 2 H$	102,6
$C-H \rightarrow C+H$	93	$H_2O \rightarrow H_2 + \frac{1}{2} O_2$	57,11
$C-C \rightarrow C+C$	71	$C \equiv C \rightarrow C+C$	125
$CO \rightarrow C+O$	160? 202?	$CO_2 \rightarrow CO + \frac{1}{2} O_2$	133,51

Man erhält für die Kohlenwasserstoffe der Paraffinreihe wegen $\beta = 2\alpha + 2$:

$$Q' = -\frac{(3\alpha + 1)}{2} \cdot 117,35 - (2\alpha + 2) \cdot 93 - (\alpha - 1) \cdot 71 + \alpha \cdot (160; 202) \\ + \frac{\alpha}{2} \cdot 117,35 + \alpha \cdot 133,51 + (\alpha + 1) \cdot 102,6 + \frac{(\alpha + 1)}{2} \cdot 117,35 + (\alpha + 1) \cdot 57,11 \\ = [\alpha \cdot (137,5; 179,5) + 44,7] \text{ Cal pro Mol.}$$

Wir nehmen einen Mittelwert aus den zwei unsicheren Werten für die CO-Bindungsenergie und setzen:

$$Q' = (\alpha \cdot 160 + 45) \cdot 10^3 \text{ cal pro Mol} \quad (17a)$$

für die Kohlenwasserstoffe der Paraffinreihe $C_n H_{2n+2}$. Für die Cycloparaffine $C_n H_{2n}$ gilt:

$$Q' = \alpha \cdot 160 \cdot 10^3 \text{ cal pro Mol,} \quad (17b)$$

für die Olefine $C_n H_{2n}$ mit einer Doppelbindung:

$$Q' = (\alpha \cdot 160 + 17) \cdot 10^3 \text{ cal pro Mol.} \quad (17c)$$

Damit werden die Heizwerte dieser Gase gut dargestellt; in Tabelle 2 ist (nach Justi l. c.) der obere, H_o , und der untere, H_u , neben Q' angegeben, das nach den Gl. (17) berechnet ist; alle Werte in Cal pro Mol.

Tabelle 2
Oberer und unterer Heizwert (Cal pro Mol)

Paraffine	α	H_u	H_o	Q'	Olefine	α	H_u	H_o	Q'
Methan . . .	1	191	213	205	Äthylen	2	318	340	337
Äthan . . .	2	341	373	365	Propen . .	3	463	495	497
Propan . . .	3	488	536	525	Buten . . .	4	609	652	657
Butan . . .	4	634	688	685					

Führt man allgemein die Bezeichnung ein:

$$\frac{\sigma}{\sigma_s} = \varepsilon, \quad (18)$$

so entspricht $\varepsilon < 1$ Sauerstoffüberschuß, $\varepsilon > 1$ Brennstoffüberschuß, $\varepsilon = 1$ bedeutet stöchiometrische Mischung. Der Wertebereich in ε reicht in der Regel von $\varepsilon \approx \frac{1}{3}$ bis $\varepsilon \approx 3$ bis 5⁶⁾; für die Paraffin-Kohlenwasserstoffe z. B. reicht er von $\varepsilon \approx \frac{1}{2}$ bis $\varepsilon \approx 3$. Die Gl. (12a, b) zeigen, daß $T_r - T_l$ und damit die Temperatur im Verbrannten im Gebiet des Sauerstoffüberschusses viel schneller mit ε veränderlich ist als im Gebiet des Brennstoffüberschusses. Im ersten Gebiet steigt $T_r - T_l$ mit wachsendem ε linear ziemlich schnell an, im zweiten Gebiet nimmt $T_r - T_l$ mit wachsendem ε linear langsam ab; der Höchstwert liegt bei $\varepsilon = 1$. Diese qualitativen Schlüsse dürften allgemein richtig sein. Für die Paraf-

⁶⁾ Siehe die Angaben von Jost über die Zündgrenzen, l. c. S. 130.

fine z. B. ist nach (17a) und (14) bei Verbrennung in Luft:

$$T_r - T_l \approx 2240^\circ \cdot \frac{(\alpha + 0,28) \cdot \varepsilon}{\alpha + 0,47}; \varepsilon \leq 1, \text{ Luftüberschuß.} \quad (19a)$$

$$T_r - T_l \approx 2240^\circ \cdot \frac{(\alpha + 0,28)(\alpha + 0,47 - 0,14\varepsilon)}{(\alpha + 0,47)(\alpha + 0,33)}; \varepsilon \geq 1, \text{ Brennstoffüberschuß.} \quad (19b)$$

Der von α , von der Art des Paraffin-Kohlenwasserstoffes abhängige Faktor wächst mit wachsendem α , also mit der Gliederzahl der Kohlenstoffkette; in (19a) von 0,87 für $\alpha = 1$ (Methan) bis 0,98 für $\alpha = 8$ (Octan), in (19b) für $\varepsilon \approx 3$ (obere Zündgrenze) von 0,69 für $\alpha = 1$ bis 0,85 für $\alpha = 8$.

Der Impulserhaltungssatz gibt (vgl. I (22a)):

$$u = u_l \cdot \frac{T}{T_l} \cdot \frac{M_l}{M}, \quad (20)$$

denn die Flammgeschwindigkeit u_l ist bei den üblichen Verbrennungen so klein gegen die Schallgeschwindigkeit c_l im Unverbrannten, daß man sich bei der Entwicklung nach $\frac{1}{\gamma} = \frac{\kappa_l u_l^2}{c_l^2}$ mit der ersten Näherung (20) begnügen kann; $\kappa_l = \frac{c_{p,l}}{c_{v,l}}$.

Aus (5), (7), (2) und (8) folgt die Differentialgleichung zur Bestimmung der Flammgeschwindigkeit nach dem gleichen Verfahren wie in der Arbeit I. Es ist für Kohlenwasserstoffe $C_\alpha H_\beta$ bei Luftüberschuß:

$$-\frac{d(n_1 u)}{dT} = \frac{\lambda Z}{c_l u_l \bar{c}_p (T - T_l) + (\lambda T_x)_l + q' (n_1 u - n_{1l} u_l)}; \quad (21a)$$

für $T = T_r$ ist $n_1 = n_{1r} = 0$. Bei Brennstoffüberschuß gilt:

$$-\frac{d(n_2 u)}{dT} = \frac{\lambda \left(\alpha + \frac{\beta}{4} \right) Z}{c_l u_l \bar{c}_p (T - T_l) + (\lambda T_x)_l + \frac{q'}{\alpha + \frac{\beta}{4}} (n_2 u - n_{2l} u_l)}; \quad (21b)$$

für $T = T_r$ ist $n_2 = n_{2r} = 0$.

An der Stelle $T = T_l$ (im Unverbrannten) ist die Gemischzusammensetzung vorgeschrieben, also $\sigma = \frac{n_{1l}}{n_l}$, $\frac{1 - \sigma}{1 + \eta} = \frac{n_{2l}}{n_l}$, vgl. (11), (14); T_x bedeutet $\frac{dT}{dx}$. Der Gleichungstyp und die Randbedingungen sind formal dieselben wie in der Arbeit I, so daß sich das dort angegebene Integrationsverfahren auch hier verwenden läßt. Wir geben aber zunächst eine Ableitung der Formel für die Flammgeschwindigkeit aus Dimensionsbetrachtungen, ebenfalls nach dem Schema der Arbeit I. Wir haben schon dort betont, und tun es hier wieder, daß dieses Dimensionsverfahren viel weiter reicht als das sonst in der Literatur verwendete, weil es die volle Kenntnis der physikalischen Zusammenhänge, nämlich alle Gleichungen, ausnützt.

§ 3. Dimensionsmäßige Berechnung der Flammgeschwindigkeit und Flammendicke

Aus (21a) und (12a) folgt für Sauerstoffüberschuß:

$$u_l^2 \sim \frac{\lambda Z}{c_l \bar{c}_p n_{1l}} = \frac{\lambda Z (T_r - T_l)}{q' n_{1l}}; \quad (22a)$$

das ist genau die Gl. (103d) der Arbeit I (r ist hier gleich 1). Für Brennstoffüberschuß folgt aus (21b), (12b):

$$u_i^2 \sim \frac{\lambda Z \left(\alpha + \frac{\beta}{4} \right)}{\varrho_i \bar{c}_p n_{21}} = \frac{\lambda Z \left(\alpha + \frac{\beta}{4} \right)^2 (T_r - T_i)}{q' n_{21}^2}. \quad (22b)$$

Als dimensionsloser Faktor kann und wird in beiden Formeln wegen der Randbedingungen eine Funktion von $\frac{T_i}{T_r}$, σ , und den in Z vorkommenden dimensionslosen Größen hinzukommen. Ihn zu bestimmen ist Aufgabe der Rechnungen in den folgenden Paragraphen. Die allgemeinen Betrachtungen der Arbeit I, § 10 gelten auch hier: u_i^2 ist proportional der Zahl der zur Reaktion führenden Stöße Z und zu $\frac{\lambda}{\varrho_i \bar{c}_p}$, wofür man nach der kinetischen Gastheorie die Diffusionskonstante D setzen kann, so daß (22a) die einfache Form bekommt:

$$u_i^2 \sim \frac{D Z}{n_{11}};$$

Entsprechendes gilt für (22b).

Die Annahme einer „Zündtemperatur“ haben wir nicht gebraucht. Wir entgehen damit den Schwierigkeiten dieser Behelfsannahme, in die man gerät, wenn die Temperatur im Unverbrannten in der Nähe dieser berechneten (aber physikalisch nicht existierenden) Zündtemperatur liegt. Unsere Theorie ist die einzige, allgemeine Theorie der Flammengeschwindigkeit, welche diese Schwierigkeit vermeidet. Den Haupteinwand gegen eine Wärmetheorie der Flammengeschwindigkeit, nämlich die angeblich unrichtige Abhängigkeit der Flammengeschwindigkeit von der Wärmeleitfähigkeit λ , habe ich schon in I § 10 widerlegt.

Für die Flammendicke folgt aus (2) und (22a)

$$\Delta x \sim \frac{n_{11} u_i}{Z} \sim \frac{\lambda}{\varrho_i \bar{c}_p u_i} \sim \frac{D}{u_i}, \quad (23)$$

was mit I (116a) übereinstimmt. Auch hier kommt als dimensionsloser Faktor eine Funktion von $\frac{T_i}{T_r}$, σ , und den in Z vorkommenden dimensionslosen Größen hinzu.

Um die Formeln auswerten zu können, muß man einen Ansatz für die Zahl Z der Reaktionen pro cm^3 und sec machen. Wir nehmen an, daß die Reaktion im wesentlichen durch Zweierstöße zustande kommt, und setzen:

$$Z = 2 \varphi \cdot n' n'' \cdot \sqrt{\frac{2 \pi k T}{m_{\text{rel}}}} \cdot e^{-\frac{E}{k T}}; \quad (24)$$

dabei ist φ die beim Stoß wirksame Fläche (der Wirkungsquerschnitt); n' n'' sind die Anzahlen der Teilchenarten im cm^3 ; k die Boltzmannsche Konstante, m_{rel} die resultierende Masse der 2 Stoßpartner:

$$m_{\text{rel}} = \frac{m' m''}{m' + m''}; \quad (25)$$

E ist die Aktivierungsenergie der Reaktion. Für n' setzen wir die Zahl der Brennstoffmoleküle, für n'' die Zahl der Sauerstoffmoleküle pro cm^3 , also:

$$n' = n_1; \quad n'' = n_2. \quad (26)$$

Die resultierende Masse bilden wir aus den Massen des Kohlenwasserstoff- und des Sauerstoffmoleküls:

$$m_{\text{rel}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}; \quad (27)$$

für λ setzen wir wie in I:

$$\lambda = \lambda_0 \cdot \sqrt{T}. \quad (28)$$

Dimensionsmäßig wird dann die Formel für die Flammengeschwindigkeit, wenn wir (22a) benützen:

$$u_i \sim \frac{2 \lambda_0 n_{21} \sqrt{\frac{2 \pi k}{m_{\text{rel}}}} \cdot T \cdot e^{-\frac{E}{kT}} \cdot \varphi(T_r - T_i)}{q' n_{11}}; \quad (29)$$

ein dimensionsloser Faktor, der von $\frac{T_r}{T_i}$, σ , $\frac{E}{kT}$ abhängen wird, kommt noch hinzu. Er wird in § 6 berechnet werden.

Bei unserem Ansatz für Z ist u_i druckunabhängig, wie es der Erfahrung zu entsprechen scheint; Δx wird dann nach (23) umgekehrt proportional zum Druck p_i im Unverbrannten, weil $D \sim \frac{1}{n}$ nach der kinetischen Gastheorie. Beides gilt auch für Reaktionen zwischen gleichen Teilchen, vgl. die Arbeit I, S. 229.

§ 4. Die Differentialgleichungen für Sauerstoff- und für Brennstoffüberschuß

Wir gehen jetzt daran, aus den Gl. (21a, b) die Flammengeschwindigkeit u_i zu berechnen. Das Verfahren ist dasselbe wie in I, § 7. Wir behandeln zuerst den Fall des Sauerstoffüberschusses und setzen:

$$\begin{aligned} n_1 &= v_1 \cdot \frac{M D_1}{M_i}; \quad \frac{E}{kT} = \tau; \quad y = \tau - \tau_r; \\ D_1 &= \frac{1}{q' \tau_i} \left(\varrho_i \bar{c}_r \frac{E}{k \tau_i} + q' \cdot n_{11} - \frac{(\lambda T_x)_i}{u_i} \right); \quad D_2 = \frac{\varrho_i \bar{c}_p E}{k \tau_i q'}. \end{aligned} \quad (30)$$

Dann wird der Nenner der rechten Seite von (21a): $\frac{u_i q' \tau_i}{\tau} (D_2 + v_1 D_1 - D_1 \tau)$; nach dem Energiesatz (12a) ist:

$$D_2 = D_1 \tau_r; \quad v_{11} = \frac{n_{11}}{D_1} = \frac{n_{11} \tau_r}{D_2} = \frac{\tau_i - \tau_r}{1 - \frac{(\lambda T_x)_i}{q' n_{11} u_i}}; \quad (31)$$

da der Nenner im vorigen Ausdruck sehr genau gleich 1 ist (vgl. die entsprechenden Überlegungen in I bei (82a)), kann man immer schreiben:

$$v_{11} = \tau_i - \tau_r = y_i, \quad (32)$$

außer, wenn es auf den Unterschied $v_{11} - y_i$ ankommt. Wegen (9), (15), (20) gilt:

$$n_2 = \frac{\tau}{\tau_i} \cdot \frac{M}{M_i} \left(n_{21} + \frac{(1 - \sigma_s) D_1}{\sigma_s (1 + \eta)} \cdot \left(\frac{\tau_i}{\tau} v_1 - v_{11} \right) \right). \quad (33)$$

Für Verbrennung von Kohlenwasserstoffen in Luft wird M nur sehr wenig vom Molekulargewicht der Luft verschieden sein und sich auch nicht erheblich mit der

Temperatur ändern; wir setzen daher: $\frac{M}{M_i} \approx 1$. Aus (21a) wird so mit dem Ansatz (24) für Z:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_1}{dy} &= \frac{v_1}{\tau_r + y} + \frac{A_1}{u_i^2} \cdot \frac{e^{-\tau_r} (1 - \sigma_s)}{\sigma_s (1 + \eta)} \cdot \frac{v_1 \left(v_1 + \frac{(\sigma_s - \sigma)(\tau_r + y)(\tau_i - \tau_r)}{\tau_i \sigma (1 - \sigma_s)} \right) e^{-y}}{(\tau_r + y)(v_1 - y)}; \\ A_1 &\equiv \frac{\lambda_0 \cdot 2 \gamma \cdot \sqrt{\frac{2 \pi k}{m_{\text{rel}}}} T_i^2}{q'}; \quad \frac{\tau_i - \tau_r}{\sigma} = \frac{\tau_i}{\frac{M_i c_p T_i}{Q'} + \sigma}; \quad \tau_r = \frac{\tau_i}{1 + \frac{Q' \sigma}{M_i c_p T_i}}; \\ \sigma &\leq \sigma_s \text{ (Sauerstoffüberschuß, Luftüberschuß).} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Die Randbedingungen sind: $v_1 = 0$ für $y = 0$; $v_1 = v_{1l} = y_l$ für $y = y_l = \tau_l - \tau_r$. Sie bestimmen die Integrationskonstante und den Parameter u_i^2 , der die einzige noch unbestimmte Größe in der Gl. (34) ist.

Für Brennstoffüberschuß setzen wir:

$$\begin{aligned} \frac{n_2 \sigma_s (1 + \eta)}{1 - \sigma_s} &= v_2 \cdot \frac{M K_1}{M_i} \cdot \frac{E}{k T} = \tau; \quad y = \tau - \tau_r; \\ K_1 &= \frac{1}{q' \tau_i} \cdot \left(\varrho_1 \bar{c}_p \frac{E}{k \tau_i} + q' n_{2l} \frac{\sigma_s (1 + \eta)}{1 - \sigma_s} - \frac{(\lambda T_s)_l}{u_i} \right); \quad K_2 = \frac{\varrho_1 \bar{c}_p E}{k \tau_i q'} = D_2. \end{aligned} \quad (35)$$

Der Nenner der rechten Seite von (21b) wird: $\frac{u_i q' \tau_i}{\tau} (K_2 + v_2 K_1 - K_1 \cdot \tau)$; nach dem Energiesatz (12b) ist:

$$K_2 = K_1 \tau_r; \quad v_{2l} = \frac{n_{2l} \sigma_s (1 + \eta)}{K_1 (1 - \sigma_s)} = \frac{\tau_i - \tau_r}{1 - \frac{(\lambda T_s)_l (1 - \sigma_s)}{q' n_{2l} u_i \sigma_s (1 + \eta)}}; \quad (36)$$

der Nenner in dem letzten Ausdruck ist wieder sehr genau gleich 1, so daß man schreiben kann:

$$v_{2l} = \tau_i - \tau_r = y_l, \quad (37)$$

außer, wenn es auf den Unterschied $v_{2l} - y_l$ ankommt. Zu beachten ist, daß τ_r im Gebiet des Brennstoffüberschusses nach (36) berechnet werden muß, während für Sauerstoffüberschuß (31) gilt. Außerdem ist:

$$n_1 = \frac{\tau}{\tau_i} \cdot \frac{M}{M_i} \left(n_{1l} + K_1 \left(v_2 \frac{\tau_i}{\tau} - v_{2l} \right) \right). \quad (38)$$

So wird aus (21b):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_2}{dy} &= \frac{v_2}{\tau_r + y} + \frac{A_2}{u_i^2} \cdot \frac{e^{-\tau_r} (1 - \sigma_s)}{\sigma_s (1 + \eta)} \cdot \frac{e^{-y} v_2 \left(v_2 + \frac{(\sigma - \sigma_s)(\tau_r + y)(\tau_l - \tau_r)}{\tau_l \sigma_s (1 - \sigma)} \right)}{(\tau_r + y)(v_2 - y)}; \\ A_2 &= A_1 \text{ (siehe Gl. (34))}; \quad \frac{\tau_l - \tau_r}{1 - \sigma} = \frac{\tau_l}{\frac{(1 - \sigma_s) M_i \bar{c}_p T_l}{\sigma_s Q'} + 1 - \sigma}; \\ \tau_r &= \frac{\tau_l}{1 + \frac{Q' (1 - \sigma) \sigma_s}{(1 - \sigma_s) M_i \bar{c}_p T_l}}; \quad \sigma \geq \sigma_s \text{ (Brennstoffüberschuß).} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Randbedingungen: $v_2 = 0$ für $y = 0$; $v_2 = v_{2l} = y_l$ für $y = y_l = \tau_l - \tau_r$. Die Differentialgleichungen (34), (39) sind gleich gebaut; sie werden formal iden-

tisch, wenn man geeignete Bezeichnungen einführt. Man kann dann die beiden Fälle „Sauerstoffüberschuß, Brennstoffüberschuß“ durch das gleiche Rechenschema erledigen. Mit den Abkürzungen:

$$\frac{A_1 e^{-\tau} (1 - \sigma_s)}{\sigma_s (1 + \eta)} = B = \frac{A_2 e^{-\tau} (1 - \sigma_s)}{\sigma_s (1 + \eta)}; \quad (40)$$

$$\frac{(\sigma_s - \sigma) (\tau_l - \tau_r)}{\tau_l \sigma (1 - \sigma_s)} = b_1; \quad \frac{(\sigma - \sigma_s) (\tau_l - \tau_r)}{\tau_l \sigma_s (1 - \sigma)} = b_2 \quad (41)$$

erhält man als Typ der Differentialgleichung, aus der u_i^2 bestimmt werden soll:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{v}{\tau_r + y} + \frac{B}{u_i^2} \cdot \frac{e^{-v} v (v + b (\tau_r + y))}{(\tau_r + y) (v - y)}; \quad (42)$$

$v = 0$ für $y = 0$; $v = \tau_l = y_l$ für $y = y_l = \tau_l - \tau_r$. Im Gebiet des Sauerstoffüberschusses ist v gleich v_1 zu setzen; b hat den Index 1, für τ_r gilt (34), und es ist $\sigma \leq \sigma_s$. Im Gebiet des Brennstoffüberschusses ist v gleich v_2 ; b hat den Index 2, für τ_r gilt (39) und es ist $\sigma \geq \sigma_s$. B ist immer > 0 , die b_i immer ≥ 0 .

§ 5. Die Integralkurven von (42)

Der Verlauf der Integralkurven der grundlegenden Differentialgleichung (42), welche den Fall der Reaktion zwischen ungleichen Molekülen beschreibt, ist derselbe wie im Fall der Reaktion zwischen gleichen Molekülen (I, § 8) bis auf unwesentliche Änderungen.

Es ist $\frac{dv}{dy} = \infty$ für $\tau = 0$ (d. h. $T \rightarrow \infty$), außerdem für die Gerade „A“: $v = y$.

Es ist $\frac{dv}{dy} = 0$ für $v = 0$, und für die Kurve „B“:

$$v - y + \frac{B}{u_i^2} e^{-v} (v + b (\tau_r + y)) = 0. \quad (43)$$

Für $v > 0$ ist das letzte Glied > 0 ; $v - y$ ist aber nur dann < 0 , wenn $v < y$. Die Kurve B liegt also in dem physikalisch allein interessierenden Bereich $v > 0$ immer unterhalb der Geraden A. Für hinreichend großes y geht $v(B)$ nach (43) gegen y ; die Kurve B nähert sich demnach für hinreichend großes y der Geraden A asymptotisch. $v(B) = 0$ für $\tau = \tau_r + \frac{B}{u_i^2} e^{\tau_r} \cdot e^{-\tau} \cdot b \tau$, was nur eine einzige Lösung $\tau > 0$ hat; die Kurve B schneidet also die Achse $v = 0$ im Bereich $\tau > 0$ in einem einzigen Punkt, der nach den vorigen Überlegungen unterhalb der Geraden A liegen muß, also bei $y > 0$, $\tau > \tau_r$.

Im Gebiet $v > 0$, $\tau > 0$, $v > y$ (also links von und oberhalb der Geraden A) ist $\frac{dv}{dy} > 0$. Dicht unterhalb der Geraden A sind alle Integralkurven nach rechts unten geneigt, denn es ist $\frac{dv}{dy} < 0$ für $v = y - \zeta$, wenn $y > 0$, $\zeta > 0$, $y > \zeta$. Ein Bündel Integralkurven läuft auf den Punkt $v = 0$, $\tau = 0$ zu; das erkennt man durch den Ansatz $v = a \cdot \tau$: für $a < 1$ wird $\frac{dv}{dy}$ nach (42) klein gegenüber 1, solange $v > y$, d. h. links von der Geraden A. Die Integralkurven schneiden also die Geraden $v = a \tau$ unter sehr geringer Neigung, wenn $a < 1$. In der Nähe der Geraden A steigen die Integralkurven an.

Für $y > 1$ wird $\frac{dv}{dy} \approx \frac{v}{\tau_r + y}$, außer in nächster Nähe der Geraden A; für großes y sind folglich die Integralkurven gerade Linien, die von $v = 0$, $\tau = 0$ auszustrahlen scheinen. Das danach qualitativ sich ergebende Bild der Integralkurven ist in Abb. 1 aufgezeichnet.

Bei gegebenem gedachtem u_i hängt der Verlauf der Integralkurven von σ ab, dem Mischungsverhältnis im Unverbrannten. Für $\sigma = \sigma_s$ (stöchiometrische Mischung) ist $b = 0$ nach (41); die Kurve B geht dann durch den Punkt P ($v = 0, y = 0$); für alle anderen σ läuft sie rechts an P vorbei. P ist ein singulärer Punkt; durch ihn muß die gesuchte Kurve C gehen, welche den Randbedingungen genügt. Sie muß außerdem durch den vorgegebenen Punkt Q ($v = v_i, y = y_i$) gehen, was nur dadurch erfüllbar ist, daß u_i^2 einen ganz bestimmten Wert hat. Das ist alles genau so wie in der Arbeit I. Q liegt praktisch auf der Geraden A , weil v_i zwar $> y_i$ ist, aber nur verschwindend wenig von y_i sich unterscheidet. C liegt

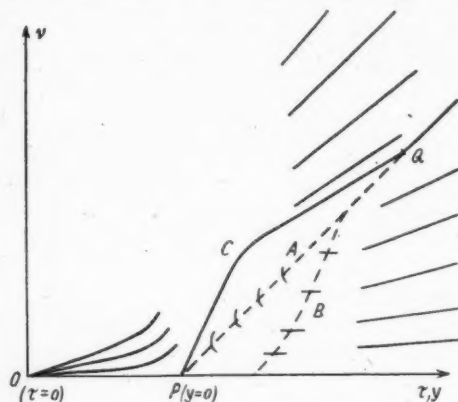


Abb. 1. Qualitativen zum Verlauf der Integralkurven von (42). Hilfskurven gestrichelt

also bis auf die Punkte P und Q ganz oberhalb der Geraden A ; denn nach den Ergebnissen über $\frac{dv}{dy}$ kann keine Integralkurve von oberhalb A her diese Gerade überschreiten (vgl. die ausführliche Diskussion in I, § 8). C steigt ständig von P bis Q . Das Verhalten in nächster Nähe von P erfährt man aus der in der Umgebung von P gültigen Näherungsgleichung:

$$\frac{dv}{dy} (v - y) \approx B' v; \quad (44a)$$

sie gilt, wenn $b \neq 0$, d. h. $\sigma \neq \sigma_s$. Es ist:

$$B' = \frac{B b}{u_i^2} \geq 0. \quad (44b)$$

Für $b = 0$ gilt:

$$\frac{dv}{dy} (v - y) \approx \frac{B'}{b} v^2. \quad (44c)$$

Die allgemeine Lösung von (44a) ist $y = \frac{v}{B' + 1} + C \cdot v^{-\frac{1}{B'}}$; die Integrationskonstante C ist null, weil hier $B' > 0$, und weil $y \rightarrow 0$ gehen soll für $v \rightarrow 0$. In nächster Nähe von P hat die Kurve C die Form:

$$v = y (B' + 1) + C' y^2 + \dots; \quad (45)$$

$$C' = \frac{B' (B' + 1) (b (1 - \tau_r) + B' + 1)}{b (2 B' + 1) \tau_r}.$$

Die Gemischzusammensetzung, die in B' und b steckt, beeinflusst also das Verhalten bei hohen Temperaturen ($T \approx T_r, y \approx 0$).

Die Darstellung (45) gilt auch noch für $b \rightarrow 0$, wo aus ihr wird:

$$v = y + \frac{B}{u_i^2 \tau_r} y^2 + \dots; \quad (45a)$$

denn die Lösung von (44c) stimmt in der Nähe von P in der Tat mit (45a) überein, wie in I, S. 213 gezeigt ist; vgl. dort die Gln. (87), (91). Für $b = 0$ (stöchiometrische Mischung im Unverbrannten) berührt also C die Gerade A in P . Für alle anderen Werte von b (andere Mischungsverhältnisse im Unverbrannten) steigt C von P aus steiler an als die Gerade A .

Bei hinreichend großem y fällt C praktisch mit dem Strahl zusammen, der von O ($\tau = 0, v = 0$) nach Q gezogen ist und die Neigung $\frac{v_i}{\tau_i} = 1 - \frac{\tau_r}{\tau_i}$ hat.

§ 6. Analytische Berechnung der Verbrennungsgeschwindigkeit

Wir verwenden das Verfahren I von § 9 der Arbeit I, S. 216, zur Bestimmung von u_i . Als Näherungsdarstellung für die Kurve C benutzen wir:

$$v_C = [y(B' + 1 - b_3(\tau_r + 1)) - \tau_r b_3] \cdot e^{-y} + b_3(y + \tau_r); \quad (46)$$

$$b_3 \equiv 1 - \frac{\tau_r}{\tau_i};$$

v_C stimmt für $y \ll 1$ mit dem ersten Glied der Darstellung (45) überein, und für $y \gg 1$ mit dem Strahl OQ . Im Zwischengebiet hat v_C qualitativ das richtige Verhalten; vgl. die entsprechende Betrachtung in der Arbeit I. Dem Verfahren I entsprechend verlangen wir, daß v_C in der Nähe von P noch mit dem nächsten Glied der Entwicklung (45) übereinstimmt. Das gibt: $C' = b_3(1 + \frac{\tau_r}{2}) - (B' + 1)$; also die Gleichung:

$$b\tau_r(2B' + 1) \left[b_3 \left(1 + \frac{\tau_r}{2} \right) - (B' + 1) \right] = B'(B' + 1) [b(1 - \tau_r) + B' + 1]; \quad (47)$$

Das ist eine Gleichung dritten Grades für B' , und damit wegen (44b) für u_i^2 . Es wird:

$$u_i^2 = \frac{Bb}{B'} = \frac{b}{B'} \cdot \frac{2\lambda_0\varphi}{q'} \cdot \frac{\sqrt{\frac{2\pi k}{m_{\text{rel}}}} \cdot T_i^{\frac{1}{2}}}{\sigma_s(1 + \eta)} \cdot \frac{e^{-\tau_r}(1 - \sigma_s)}{\sigma_s(1 + \eta)} \quad (48)$$

(47) hat nur eine positive Wurzel, nur sie ist physikalisch von Bedeutung, nur sie ist in (48) einzusetzen. τ_r liegt für die Kohlenwasserstoffverbrennung in der Größenordnung von etwa 8–16, τ_i ist rund 6 bis 7mal größer für $T_i \approx 300^\circ$ abs. b liegt zwischen 0 und 2, sowohl für $\sigma \leq \sigma_s$ als auch für $\sigma \geq \sigma_s$, denn die Zündgrenzen liegen etwa bei $\sigma = \frac{\sigma_s}{3}$ und $\sigma = 3\sigma_s$. Die positive Wurzel von (47) stellen wir durch die Näherungsformel dar:

$$\frac{b}{B'} \approx \frac{1 + \frac{2}{\tau_r b}}{\frac{\tau_r}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4}{b}} \right)}, \quad (49)$$

mit einem Fehler von etwa $\pm 20\%$. Wegen der Bedeutung der Abkürzung b vgl. (41) und den dort anschließenden Text. Für stöchiometrische Mischung wird $b = 0$ und:

$$\left(\frac{b}{B'} \right)_s \approx \frac{2}{\tau_r^2} \quad (50)$$

Bis auf dimensionslose Faktoren stimmt (48) zusammen mit (50) natürlich mit der aus Dimensionsbetrachtungen gewonnenen allgemeinen Formel (22) überein, wenn man dort den Ansatz (24) für die Zahl Z der Reaktionen benützt.

Die Diffusion haben wir nicht explizit berücksichtigt; sie ändert am Dimensionszusammenhang nichts. Die Diffusion verbreitert aber den Bereich der Flamme, und das läuft darauf hinaus, daß die Aktivierungsenergie vermindert erscheint. Beim Vergleich mit der Erfahrung werden wir also zweckmäßig E aus einer Messung von u_i entnehmen.

Wir werten die Formel (48) für die Verbrennung eines Kohlenwasserstoffs $C_x H_\beta$ in Luft aus. Für die Stoßfläche φ , die beim Zusammenstoß der reagierenden Moleküle wirksam ist, nehmen wir an: $\varphi \approx 5 \cdot 3,2 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$; nach (27) ist:

$$m_{\text{rel}} = \frac{(12\alpha + \beta) \cdot 32}{12\alpha + \beta + 32} \cdot 1,6 \cdot 10^{-24} \text{ gr}; \frac{1}{\sqrt{m_{\text{rel}}}}$$

ist mit α nicht sehr veränderlich, wir rechnen mit: $\frac{1}{\sqrt{m_{\text{rel}}}} \approx \frac{1}{\sqrt{20 m_H}} = 1,8 \cdot 10^{11}$; für λ_0 nehmen wir den Sauerstoffwert: $\lambda_0 \approx 1,5 \cdot 10^3 \text{ CGS}$. Außerdem ist nach (17a) und (15) für die Verbrennung von Paraffinen in Luft:

$$Q' \sigma_s = \frac{(x \cdot 160 + 45) \cdot 10^3}{1 + (3x + 1) \cdot 2,38} \text{ cal} = \frac{(\alpha + 0,28) \cdot 22,4 \cdot 10^3}{\alpha + 0,47} \text{ cal}; \quad (51)$$

der von α abhängige Faktor ändert sich nur wenig mit α . Ersetzt man die Formel (51) durch die einfachere:

$$Q' \sigma_s \approx 22,4 \cdot 10^3 \text{ cal}, \quad (51a)$$

so macht man einen Fehler von höchstens 13%, wenn man σ aus τ_r mit Hilfe von (51a) berechnen will. Etwa ebenso groß ist der Fehler in τ_r , wenn dieses mit Hilfe von σ aus (34) oder (39) berechnet wird. Da τ_r in u_i^2 in der Form $e^{-\tau_r}$ vorkommt, und τ_r Werte in der Größenordnung von 8–16 hat, darf man zur Berechnung von u_i^2 nicht (51a) benutzen, sondern muß die genauere Gleichung (51) nehmen.

Für die Cycloparaffine gilt:

$$Q' \sigma_s = \frac{\alpha \cdot 22,4 \cdot 10^3}{\alpha + 0,14} \text{ cal}; \quad (52)$$

auch hier geht der Fehler nicht über etwa 12% hinaus, wenn wir diese Gleichung durch (51a) ersetzen.

Für die Olefine haben wir:

$$Q' \sigma_s = \frac{(\alpha + 0,11) \cdot 22,4 \cdot 10^3}{\alpha + 0,14} \text{ cal}. \quad (53)$$

Hier beträgt der Fehler höchstens etwa 1%, wenn wir (51a) statt (53) benutzen. Für die angenäherte Berechnung von σ aus τ_r genügt also (51a) für die Paraffine, Cycloparaffine, Olefine.

In der Näherung, in der man (51) bis (53) durch (51a) ersetzen kann, also mit einem Fehler von höchstens 13%, gilt für die genannten Kohlenwasserstoffe nach (19a, b):

$$T_r - T_l = \frac{Q' \sigma_s \varepsilon}{M_l \bar{c}_p} \approx 2240^\circ \cdot \varepsilon, \text{ für } \varepsilon \leq 1 \text{ (Luftüberschuß)}; \quad (54a)$$

$$T_r - T_l = \frac{Q' \sigma_s \delta}{M_l \bar{c}_p} \approx 2240^\circ \cdot \delta, \text{ für } \varepsilon \geq 1 \text{ (Brennstoffüberschuß)}, \quad (54b)$$

wobei wir die Abkürzung:

$$\delta \equiv \frac{1 - \sigma}{1 - \sigma_s} = \frac{1 - \varepsilon \sigma_s}{1 - \sigma_s} \quad (55)$$

eingeführt haben; der Wertebereich von ε geht von 0 über 1 (stöchiometrischer Punkt) bis $\frac{1}{\sigma_s}$, weil σ von 0 über σ_s (stöchiometrischer Punkt) bis 1 geht; δ nimmt entsprechend ab von $\frac{1}{1 - \sigma_s}$ über 1 (stöchiometrischer Punkt) bis 0.

Nach (54a, b) ist der Temperaturunterschied $T_r - T_b$, und bei festem T_i auch T_r , bei gleichem ε bzw. δ , angenähert gleich für alle hier betrachteten Kohlenwasserstoffe. Ich habe kein experimentelles Material, um diesen Schluß zu prüfen. Für ihn spricht, daß wir mit (54a, b) oder genauer mit (51), (52), (53), und unserer Formel für die Flammgeschwindigkeit, die untere Zündgrenze für solche Kohlenwasserstoffe im Einklang mit der Erfahrung berechnen können (§ 7).

Bei Zahlenrechnungen brauchen wir noch die Aktivierungsenergie E . Aus der bei Jost l. c. S. 391 gegebenen Tabelle kann man nach meiner Ansicht den Schluß ziehen, daß die Aktivierungsenergie für die Paraffine einen Wert von etwa 65 cal pro Mol hat. Eine Unterscheidung nach den einzelnen Kohlenwasserstoffen scheint bei der großen Streuung der von den verschiedenen Autoren angegebenen Meßwerte nicht sinnvoll; es ist auch theoretisch plausibel, E als nicht wesentlich verschieden für diese Kohlenwasserstoffe anzunehmen. Um numerisch rechnen zu können, setzen wir E als gleich an für die ganze Gruppe der hier betrachteten Kohlenwasserstoffe, also auch für die Cycloparaffine und Olefine. Wir müssen aber beachten, daß unser E durch die Diffusion gegenüber der wirklichen Aktivierungsenergie erniedrigt ist. E wählen wir so, daß für Hexan der Maximalwert von u_i die beobachtete Größenordnung von etwa 30 cm/sec bekommt, wenn $T_i \approx 300^\circ$ abs. Es ergibt sich aus einer Rechnung mit den folgenden Formeln (56), (57): $E \approx 45$ Cal pro Mol. Die Diffusion erniedrigt die Aktivierungsenergie also um 31%, bei der Ozonverbrennung waren es 21%. Nach den Überlegungen von Jost und von v. Müffling (Jost l. c. S. 115) muß die Diffusion ja auch eine recht große Rolle spielen. Doch sind die Zahlenwerte in unseren Formeln nicht zu genau zu nehmen; der Faktor 2240° in (54) hängt wesentlich an unserer Schätzung von $M_i c_p \approx 10$ cal/grad; sie beeinflusst auf dem Weg über T_r auch unser E . Auch die Schätzungen von λ_0 und φ haben wegen (48) Einfluß auf E . Es kommt uns vor allem auf die qualitativen Schlüsse an, die wir aus unseren Formeln ziehen können.

Ändert man die Temperatur T_i im Unverbrannten nicht zu sehr, etwa nur von 27° C auf 100° C, so steigt T_r nach (54a, b) ebenfalls um 73° , ändert sich also verhältnismäßig wenig; bei Hexan würde τ_r dabei von 10,0 auf 9,75 zurückgehen; vgl. Tabelle 3. Die Flammgeschwindigkeit würde sich dabei mit dem Faktor 1,40 multiplizieren, während T_b , das in u_i explizit als Faktor vorkommt, sich mit 1,24 multipliziert. Die Flammgeschwindigkeit ändert sich demnach, bei so verhältnismäßig geringen Änderungen der absoluten Temperatur T_i im Unverbrannten, etwas mehr als proportional dieser Temperatur. Das entspricht der Beobachtung.

Am Beispiel des Hexans zeigen wir jetzt, wie sich die Flammgeschwindigkeit mit der Gemischzusammensetzung nach der Theorie ändert.

Wir stellen zuerst die Formeln zusammen; die folgenden Gl. (56a bis c) gelten allgemein für Reaktionen zwischen ungleichen Molekülen.

$$\left. \begin{aligned} a &\equiv \frac{Q' \sigma_s}{M_i \bar{c}_p \cdot 300}; \quad T^* \equiv \frac{T}{300}; \quad \varepsilon \equiv \frac{\sigma}{\sigma_s}; \quad \delta \equiv \frac{1 - \sigma}{1 - \sigma_s} = \frac{1 - \varepsilon \sigma_s}{1 - \sigma_s}; \quad \tau \equiv \frac{E}{k T}; \\ u_i^* &= \frac{\left(1 + \frac{2}{\tau_r \sqrt{\delta}}\right) \cdot e^{-\tau_r}}{\frac{\tau_r}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\delta}}\right)} \cdot T_i^* \cdot \frac{2 \lambda_0 \varphi \sqrt{\frac{2 \pi k}{m_{rel}}} \cdot 9 \cdot 10^4 \cdot L}{1 + \eta} \cdot \frac{1 - \sigma_s}{Q' \sigma_s}; \end{aligned} \right\} \quad (56a)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Luftüberschuß: } 0 \leq \sigma \leq \sigma_s; \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1; \quad b = b_1 \equiv \frac{1-\varepsilon}{1-\sigma_s} \cdot \frac{a}{T_1^*} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a\varepsilon}{T_1^*}}; \\ \tau_r = \frac{\tau_1}{1 + \frac{a\varepsilon}{T_1^*}}; \end{aligned} \right\} \quad (56b)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Brennstoffüberschuß: } \sigma_s \leq \sigma \leq 1; \quad 1 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{\sigma_s}; \quad 1 \geq \delta \geq 0; \\ b = b_2 \equiv \frac{1-\delta}{\sigma_s} \cdot \frac{a}{T_1^*} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a\delta}{T_1^*}}; \quad \tau_r = \frac{\tau_1}{1 + \frac{a\delta}{T_1^*}}. \end{aligned} \right\} \quad (56c)$$

Für die Verbrennung von Kohlenwasserstoffen C_nH_β in Luft gilt:

$$\sigma_s = \frac{1}{1 + \left(\alpha + \frac{\beta}{4}\right) \cdot 4,76}; \quad \frac{2 \lambda_0 \varphi \sqrt{\frac{2 \pi k}{m_{\text{rel}}}} \cdot 9 \cdot 10^4 \cdot L}{1 + \eta} \approx 2,9 \cdot 10^{10} \text{ erg} \cdot \left(\frac{\text{cm}}{\text{sec}}\right)^2; \quad (57a)$$

für die Paraffine ist nach unseren Überlegungen:

$$\sigma_s = \frac{1}{1 + (3\alpha + 1) \cdot 2,38}; \quad a \approx \frac{\alpha + 0,28}{\alpha + 0,47} \cdot 7,47; \quad \frac{1-\sigma_s}{Q' \sigma_s} \approx \frac{\alpha + 0,33}{\alpha + 0,28} \cdot 1,07 \cdot 10^{-12} \text{ erg}^{-1}; \quad (57b)$$

für die Cycloparaffine:

$$\sigma_s = \frac{1}{1 + 3\alpha \cdot 2,38}; \quad a \approx \frac{\alpha}{\alpha + 0,14} \cdot 7,47; \quad \frac{1-\sigma_s}{Q' \sigma_s} \approx 1,07 \cdot 10^{-12} \text{ erg}^{-1}; \quad (57c)$$

für die Olefine:

$$\sigma_s = \frac{1}{1 + 3\alpha \cdot 2,38}; \quad a \approx \frac{\alpha + 0,11}{\alpha + 0,14} \cdot 7,47; \quad \frac{1-\sigma_s}{Q' \sigma_s} \approx \frac{\alpha}{\alpha + 0,11} \cdot 1,07 \cdot 10^{-12} \text{ erg}^{-1}. \quad (57d)$$

τ hat für die 3 Gleichungen (57b–d) den gleichen Wert:

$$\tau \equiv \frac{E}{kT} \approx \frac{75,5}{T^*} = \frac{22650}{T}. \quad (57e)$$

So erhalten wir für Hexan bei $T_1 = 300^\circ$ abs nach (57b) wegen $\alpha = 6$: $\sigma_s = \frac{1}{46,1} = 0,022$; $a = 7,25$; $T_1^* = 1$; $\tau_1 = 75,5$; $\frac{1-\sigma_s}{Q' \sigma_s} = 1,08 \cdot 10^{-12} \text{ erg}^{-1}$. In der folgenden Tabelle 3 stehen in den einzelnen Spalten: die Mischungsgröße $\varepsilon = \frac{\sigma}{\sigma_s}$, τ_r , das daraus berechnete T_r ; b , u_r .

Man sieht, daß die Flammgeschwindigkeit ihr Maximum im Gebiet des Brennstoffüberschusses ($\varepsilon > 1$) hat; sie steigt von kleinen ε her bis zu diesem Maximum monoton an und fällt dann bei weiterem Brennstoffzusatz monoton ab. Mathematisch kommt dies dadurch zustande, daß b für $\varepsilon > 1$ wegen des Faktors $\frac{1-\delta}{\sigma_s}$ rasch zunimmt, während τ_r ziemlich langsam abnimmt. Das gilt theoretisch allgemein, wie man an den Formeln sieht, nicht nur für die Hexan-Verbrennung. ($\frac{1}{\sigma_s}$ ist eine große Zahl und $1-\delta$ ändert sich von 0 an für $\varepsilon \geq 1$.) Damit haben wir eine auffällige Erfahrungstatsache (Jost l. c. S. 121, Tabelle 21) theoretisch verständlich gemacht, die allen Verbrennungen gemeinsam ist (bei Reaktionen zwischen ungleichen Teilchen), die aber bisher nicht recht erklärt war. Das Maxi-

Tabelle 3
Hexan-Verbrennung in Luft, theoretisch; $T_i = 300^\circ$ abs

ε	τ_r	T_r° abs	b	u_i in $\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$
0,50	16,32	1390	0,79	0,5
0,75	11,70	1940	0,287	4,5
1 stöch. Punkt	9,16	2470	0	9
2	9,35	2420	0,95	24
3	9,51	2380	1,85	27
4	9,73	2330	2,84	29
6	10,01	2260	4,90	28
10	11,11	2040	9,85	21
20	14,55	1550	27,2	5

mun von u_i liegt nach unserer Rechnung etwa bei $\varepsilon = 4$. Beobachtet ist es bei $\varepsilon \approx 1,14$. Daß der Wert nicht genau herauskommt, braucht uns nach den gemachten Vernachlässigungen nicht zu wundern. Dieselbe Rechnung für Pentan ($\alpha = 5$) gibt theoretisch das Maximum von u_i ebenfalls etwa bei $\varepsilon = 4$; beobachtet ist es bei $\varepsilon = 1,11$. Das Maximum von u_i hat theoretisch ungefähr denselben Wert (etwas unter 30 cm/sec) wie für Hexan. Auch das entspricht der Erfahrung: die maximalen Flammgeschwindigkeiten der Paraffine sind einander nahe gleich; der experimentelle Wert ist ungefähr 35 cm/sec.

§ 7. Die Breite der Reaktionszone

Das Temperaturverhalten im Reaktionsgebiet kann genau wie in I bestimmt werden (dort § 11). Man erhält:

$$\lambda \frac{dT}{dx} = \frac{u_i q' \sigma_s n_i}{1 - \frac{\tau_r}{\tau_i}} \cdot \bar{\varepsilon} \cdot \frac{v - y}{\tau}; \quad (58)$$

dabei gilt für $\sigma \leq \sigma_s$: $v = v_1$; $\bar{\varepsilon} = \varepsilon$; und für $\sigma \geq \sigma_s$: $v = v_2$; $\bar{\varepsilon} = \delta$. Am stöchiometrischen Punkt sind die beiden Formeln identisch, wie man leicht nachrechnen kann. Durch Umschreiben auf die Veränderliche y und Einsetzen der Näherung (46) für v wird aus (58):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(\tau_r + y)^{3/2}}{\Lambda} \cdot \left[y_i - y + e^{-y} \left\{ y \left(1 + \frac{B' \tau_i}{\tau_r} - y_i \right) - y_i \right\} \right];$$

$$\Lambda \equiv \frac{\lambda_0 E^{3/2} \left(1 - \frac{\tau_r}{\tau_i} \right)}{k^{3/2} p_i \tau_r u_i q' \sigma_s \bar{\varepsilon}}. \quad (59)$$

Durch näherungsweise analytische oder graphische Integration von (59) bekommt man das Temperaturverhalten im Reaktionsgebiet. Wir wollen gleich die Breite dieses Gebietes bestimmen. $\frac{dy}{dx}$ ist Null für $y = y_i \gg 1$ ($T = T_i$) und für $y = 0$ ($T = T_r$); das letztere bestätigt man leicht durch Reihenentwicklung der eckigen Klammer in (59). Dazwischen hat $\frac{dy}{dx}$ ein Maximum bei $y \approx 0,6$

$\tau_t - \tau_r \approx \frac{\tau_t}{2}$; die Entfernung zwischen dem Punkt $y = y_t \approx \tau_t$ und diesem Maximum von $\frac{dy}{dx}$ wird etwa die halbe Breite des Reaktionsgebietes sein, und die Neigung $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bei $y \approx \frac{\tau_t}{2}$ wird durch $\frac{\tau_t/2}{\Delta x/2}$ gegeben sein. Das gibt für die Breite der Reaktionszone größenordnungsmäßig:

$$\Delta x \approx \frac{\tau_t}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{y=\tau_t/2}} \approx \tau_t \cdot \frac{\Delta}{\left(\frac{\tau_t}{2}\right)^{5/3}} \approx \frac{6 \lambda_0 E^{5/2} \left(1 - \frac{\tau_r}{\tau_t}\right)}{k^{3/2} p_t u_t q' \sigma_s \bar{e} \tau_r \tau_t^{3/2}}, \quad (60)$$

was genau der Gleichung für die Dicke des Reaktionsgebietes in Arbeit I (dort Gln. (115a), (116a, b)) entspricht. Bei unserem Ansatz für die Stoßzahl Z ist Δx umgekehrt proportional zum Druck p_t .

Wir werten die Formel für die Kohlenwasserstoffverbrennung aus. Bei der Hexan-Verbrennung bekommen wir für Atmosphärendruck und 300° abs im Unverbrannten beim Maximum der Flammengeschwindigkeit: $\tau_r \approx 10$; $u_t \approx 30$; $\tau_t \approx 76$; $\Delta x \approx 2,3 \cdot 10^{-2}$ cm, also einen Wert vernünftiger Größenordnung.

§ 8. Die Zündgrenzen

Wir wollen uns mit einer einfachen Überlegung begnügen, die für das Verständnis der wichtigsten Erscheinungen ausreicht, die mit den Zündgrenzen bei der Kohlenwasserstoffverbrennung zusammenhängen.

Wir schließen zunächst den Fall aus, daß die äußere Begrenzung des Gases eine Rolle spielt. Dann wird bei der Kohlenwasserstoffverbrennung in Luft die Wärmeleitung und Diffusion an der unteren Zündgrenze hauptsächlich durch die Luft besorgt, weil sie an Molzahl den Kohlenwasserstoff erheblich überwiegt. Die durch die störende Wirkung von Wärmeleitung, Diffusion und ähnliche gaskinetische Effekte bedingte untere Grenze für die Geschwindigkeit der Flammenwanderung bei der Kohlenwasserstoffverbrennung in Luft muß also für alle Kohlenwasserstoffe gleich sein; wir nennen diese Geschwindigkeit \bar{u} ; natürlich ist sie keine scharfe Grenze für u_t , nur die Größenordnung wird unter den gleichen Versuchsumständen dieselbe bleiben. Wir werden zeigen: dieser größenordnungsmäßigen Grenze in u_t entspricht eine scharfe Grenze ε_u in der Gemischzusammensetzung ε , und ε_u ist für alle hier betrachteten Kohlenwasserstoffe bei gegebener Temperatur T_t praktisch gleich.

Die Gln. (57) lehren, daß $\frac{1 - \sigma_s}{Q' \sigma_s}$ von α praktisch unabhängig den Wert $1,07 \cdot 10^{-12}$ erg⁻¹ hat; der in (56a) davorstehende Bruch ist nach (57a) eine Konstante vom Wert $2,9 \cdot 10^{19}$ CGS; T_t soll nach Voraussetzung gegeben sein. Dann ist nach unseren Überlegungen der erste Bruch in (56a) seiner Größenordnung nach ungefähr festgelegt; er enthält einen schnell veränderlichen Faktor: $e^{-\tau_r}$; die anderen sind langsam veränderlich. τ_r ist recht groß, im Gebiet des Luftüberschusses liegt es merklich über 10. Einer relativen Änderung $\frac{\Delta \bar{u}}{\bar{u}}$ entspricht nach (56a) eine Änderung $\Delta \tau_r$ von der Größe: $\Delta \tau_r \approx -2 \frac{\Delta \bar{u}}{\bar{u}}$, und eine Änderung von ε nach (56b) von:

$$\Delta \varepsilon_u = - \frac{T_t^* \tau_t \Delta \tau_r}{a \tau_r^2} = \frac{2 T_t^* \tau_t}{a \tau_r^2} \cdot \frac{\Delta \bar{u}}{\bar{u}} < \frac{T_t^*}{b} \cdot \frac{\Delta \bar{u}}{\bar{u}};$$

eine Änderung von ε_u um 0,2 würde also für $T_i = 300^\circ$ bereits eine Änderung dieser Grenzgeschwindigkeit um ihre eigene Größenordnung bedeuten. Die Gemischzusammensetzung an der unteren Zündgrenze hat demnach theoretisch einen gut definierten Wert, wenn das Ausgehen der Verbrennung nur durch die betrachteten Vorgänge im Gas verursacht ist. Das entspricht der Erfahrung, wie auch der weitere Schluß: ε_u ist für alle Kohlenwasserstoffe praktisch gleich. τ_r ist ja wegen $\frac{\Delta \tau_r}{\tau_r} \approx -\frac{2}{\tau_r} \cdot \frac{\Delta \bar{u}}{\bar{u}} \approx -\frac{1}{8} \frac{\Delta \bar{u}}{\bar{u}}$ recht gut definiert, und a hängt nach (57b—d) nur wenig von α ab.

Setzen wir $\bar{u} \approx 1$ cm/sec, was sicher eine vernünftige Größenordnung ist, so können wir die Gemischzusammensetzung für die untere Zündgrenze sogar berechnen. Da wir soeben überlegt haben, daß ε_u von der Art des Kohlenwasserstoffes fast unabhängig sein muß, können wir aus der Berechnung von u_i für Hexan die untere Zündgrenze für alle Kohlenwasserstoffe der hier betrachteten Art (Paraffine, Cycloparaffine, Olefine) entnehmen. Tabelle 3 zeigt, daß für $T_i = 300^\circ$ abs u_i in der Größenordnung von 1 liegt, wenn $\varepsilon \approx 0,50$ ist. Nach unserer Überlegung ist dies also die untere Zündgrenze ε_u ; das Luft-Brennstoffgemisch zündet etwa bei der Hälfte des stöchiometrischen Kohlenwasserstoffzusatzes. Diese Behauptung entspricht der Erfahrung, wie wir gleich nachweisen werden. Das Ergebnis ist zugleich eine Bestätigung dafür, daß unsere „effektive“ Aktivierungsenergie $E \approx 45$ Cal pro Mol für diese Kohlenwasserstoffe den gleichen Wert hat. Nach Tabelle 3 liegt τ_r an der unteren Zündgrenze für $T_i = 300^\circ$ abs in der Gegend von 16, und die Temperatur T_r im Verbrannten etwa bei 1400° abs.

Unsere Angabe $\bar{u} \approx 1$ war eine Abschätzung der Größenordnung. Wir verfeinern die Rechnung, indem wir ε_u für einen der Kohlenwasserstoffe dem beobachteten Wert anpassen. Damit ist \bar{u} festgelegt; aus (56), (57) ergibt sich dann eine geringe Veränderlichkeit von ε_u mit der Art des Kohlenwasserstoffes, die wir jetzt nachrechnen und mit der Beobachtung vergleichen wollen. Wir passen an für Propan, einen Paraffin-Kohlenwasserstoff mit $\alpha = 3$; es ist $\sigma_s = \frac{1}{24,8} = 4,04 \cdot 10^{-2}$; beobachtet ist (Jost l. c. S. 130, Tabelle 26) $\sigma_u = 2,37 \cdot 10^{-2}$; das gibt $\varepsilon_u = \frac{2,37}{4,04} = 0,58$. Vermutlich entspricht der Meßwert von σ_u einer Temperatur von $T_i \approx 300^\circ$ abs, in der genannten Tabelle von Jost ist T_i nicht angegeben; wir setzen $T_i^* = 1$. Aus (56), (57) folgt: $a = 7,06$; $\tau_i = 75,5$; $\tau_r = 14,85$; $T_r = 1530^\circ$ abs; $b = b_i = 0,61$; $\frac{1-\sigma_s}{Q \sigma_s} = 1,09 \cdot 10^{-12}$; $\bar{u} = 0,97 \approx 1$ cm/sec, wie erwartet. Mit diesem Wert 0,97 von \bar{u} berechnen wir ε_u für die anderen Kohlenwasserstoffe. Bei den Paraffinen ist für ε_u die Bedingung zu erfüllen:

$$\frac{\left(1 + \frac{2}{\tau_r \sqrt{b_i}}\right) e^{-\tau_r}}{\frac{\tau_r}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4}{b_i}}\right)} = \frac{3,03 \cdot 10^{-8}}{T_i^{*2}} \cdot \frac{\alpha + 0,28}{\alpha + 0,33}; \quad \tau_r = \frac{75,5}{T_i^* \left(1 + \frac{a \varepsilon_u}{T_i^*}\right)}; \quad (61)$$

$$b_i = \frac{1 - \varepsilon_u}{1 - \sigma_s} \cdot \frac{a}{T_i^*} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a \varepsilon_u}{T_i^*}}; \quad a = \frac{\alpha + 0,28}{\alpha + 0,47} \cdot 7,47; \quad \sigma_s = \frac{1}{1 + (3\alpha + 1) \cdot 2,38}.$$

Da der Faktor $e^{-\tau_r}$ weitaus am schnellsten veränderlich ist, sieht man, daß Vergrößerung von T_i^* , Erhöhung der Temperatur also, τ_r vergrößert. Erhöht

man die Temperatur im Unverbrannten von T_{i1} auf $T_{i2} > T_{i1}$, so ist die Bedingung (61) für die untere Zündgrenze in den beiden Fällen angenähert: $\frac{E}{2kT_r} = \ln(C T_i^*)$; C ist eine wenig veränderliche Größe.

Wir kürzen ab:

$$\frac{E}{2 \cdot 300 k} = E',$$

und haben:

$$T_{r2}^* - T_{r1}^* = \frac{E' (\ln T_{i1}^* - \ln T_{i2}^*)}{\ln(C T_{i1}^*) \cdot \ln(C T_{i2}^*)} < 0.$$

Wegen $\sigma < \sigma_s$ gilt der Energiesatz (12a), den wir schreiben können:

$$T_r^* - T_i^* = a \varepsilon;$$

also ist:

$$a (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = T_{r2}^* - T_{r1}^* - (T_{i2}^* - T_{i1}^*) < 0,$$

das bedeutet: $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, wegen $T_{i2} > T_{i1}$. ε ist hier wegen (61) die Gemischzusammensetzung an der unteren Zündgrenze. Wir haben also: die untere Zündgrenze rückt bei Temperaturerhöhung nach dem Gebiet geringeren Brennstoffzusatzes. Das ist offenbar ein allgemeingültiger theoretischer Schluß, denn er hängt nur am Bau der Formel (56a), die für Reaktionen zwischen ungleichen Molekülen allgemein gilt. In der Tat ist es eine allgemeine Erfahrung, daß die Zündgrenzen mit steigender Temperatur sich erweitern.

Bei den Cycloparaffinen ist der letzte Faktor auf der rechten Seite in (61) 1 statt $\frac{\alpha + 0,28}{\alpha + 0,33}$, die Werte von a und σ_s sind aus (57c) zu nehmen. Bei den Olefinen ist der letzte Faktor auf der rechten Seite $\frac{\alpha + 0,11}{\alpha}$, a und σ_s stehen in (57d). Den Vergleich der nach (61) berechneten und der beobachteten (zitiert nach Jost l. c. S. 130) unteren Zündgrenzen ε_u gibt Tabelle 4 für Paraffine, Cycloparaffine, Olefine. Außerdem stehen in der Tabelle die berechneten Werte von α , $\frac{1}{\sigma_s}$, a , $\frac{1 - \sigma_s}{Q' \sigma_s}$, und die für die untere Zündgrenze berechneten Werte $Q' \cdot \sigma_u$, τ_r , T_r . Für die Rechnung ist $T_i = 300^\circ$ abs angenommen, vermutlich entsprechen die gemessenen Zündgrenzen dieser Temperatur oder einer ihr naheliegenden⁷⁾.

Man sieht:

1) Die Gemischzusammensetzung an der unteren Zündgrenze in Bruchteilen der stöchiometrischen Zusammensetzung, also unser ε_u , ist theoretisch und experimentell fast konstant und etwa gleich 0,55. Dieser Zusammenhang gilt übrigens auch für viele andere Verbindungen aus Kohlenstoff, Wasserstoff und Sauerstoff: Benzol hat $\varepsilon_u = 0,52$ usw. Daß ε_u experimentell nur wenig um diesen Wert schwankt, ist in der Literatur anscheinend bisher nicht bemerkt worden; bei den Meßdaten ist immer σ_u , also $\varepsilon_u \cdot \sigma_s$, angegeben, das wegen der starken Veränderlichkeit von σ_s nicht entfernt konstant ist.

⁷⁾ Die Tabelle ist mit dem Rechenschieber gerechnet, so daß die letzte Dezimale in τ_r nicht ganz sicher ist; daher rührt der nicht ganz regelmäßige Gang in T_r . Um das Wesentliche zu zeigen, genügt die Rechenschiebergengenauigkeit.

Tabelle 4
Untere Zündgrenze für Paraffine, Cycloparaffine, Olefine. $T_i = 300^\circ \text{ abs.}$

Verbindung	α	$\frac{1}{\sigma_s}$	a	$\frac{1-\sigma_s}{Q' \sigma_s} \cdot 10^{12} \text{ erg}^{-1}$	ϵ_u ber. Gl.(61)	ϵ_u beob.	$Q' \sigma_u \cdot 100$ ber. Q' in Cal	τ_r	T_i° abs. ber.
Methan	1	10,5	6,51	1,11	0,63	0,53	1230	14,80	1530
Äthan	2	17,7	6,90	1,09	0,59	0,57	1220	14,90	1520
Propan	3	24,8	7,06	1,09	0,58	0,58	1220	14,85	1530
Butan	4	31,9	7,16	1,08	0,57	0,59	1220	14,86	1520
Pentan	5	39,1	7,21	1,08	0,56	0,55	1210	15,00	1510
Hexan	6	46,2	7,25	1,08	0,56	0,58	1210	14,92	1520
Heptan	7	53,3	7,28	1,08	0,56	0,53	1210	14,85	1530
Octan	8	60,5	7,30	1,08	0,55	0,57	1200	15,05	1510
Nonan	9	67,6	7,31	1,08	0,55	0,56	1200	15,03	1510
Decan	10	74,7	7,32	1,08	0,55	0,50	1200	15,03	1510
Cyclopropan	3	22,4	7,15	1,07	0,57	0,53	1220	14,89	1520
Cyclohexan	6	43,9	7,31	1,07	0,56	0,58	1220	14,85	1530
Äthylen	2	15,3	7,34	1,02	0,55	0,42	1200	15,00	1510
Propen	3	22,4	7,40	1,03	0,55	0,45	1210	14,93	1520
Buten	4	29,5	7,43	1,04	0,55	0,50	1220	14,85	1530
Penten	5	26,7	7,45	1,05	0,55	0,59	1220	14,80	1530

2) $\frac{1-\sigma_s}{Q' \sigma_s}$ ist theoretisch ebenfalls fast konstant und hat Werte in der Gegend von $1 \cdot 10^{-12} \text{ erg}^{-1}$; das ist natürlich schon an unseren Gl.n. (57b—d) zu sehen. Auch $Q' \sigma_s$ ist theoretisch annähernd konstant, wenn auch weniger gut, das haben wir schon in § 6 besprochen, siehe Gl. (51) bis (53). Diese Aussagen sind auch experimentell richtig, unsere Q' entsprechen ja sehr gut dem (oberen) Heizwert.

3) $Q' \sigma_u$ ist theoretisch sehr gut konstant; wenn man Q' in Cal pro Mol und σ_u in Prozent ausdrückt, hat $Q' \sigma_u$ Werte in der Nähe von 1220. Diese Regel ist empirisch bekannt (Burgess und Wheeler 1911). Unsere Q' -Werte sind aus den Bindungsenergien berechnet und entsprechen recht gut dem oberen Heizwert (s. Tabelle 2). Empirisch wird (Jost l. c. S. 129) für $Q' \sigma_u$ etwa 1100 angegeben. Der Unterschied zu dem Wert von Tabelle 4 von etwa 1220 kann nicht durch σ_u verursacht sein, denn unsere theoretischen σ_u stimmen gut mit den experimentellen überein, wie man an den ϵ_u erkennt, und die σ_s sind ja per definitionem experimentell dieselben wie theoretisch. Der Unterschied im Ergebnis für $Q' \sigma_u$ muß davon herrühren, daß in der Arbeit von Burgess und Wheeler etwas andere Q' -Werte benützt worden sind; die Originalarbeit *) ist mir nicht zugänglich.

4) Theoretisch hat die Temperatur T_r im Verbrannten an der unteren Zündgrenze einen fast konstanten Wert von etwa 1500° abs. Man kann das auch so ausdrücken: $1 + a \epsilon$ hat an der unteren Zündgrenze einen fast konstanten Wert von 5,0 bis 5,1. Hier zeigt sich der Zusammenhang mit der Gesetzmäßigkeit 3), doch hängt 4) außerdem zusammen mit der von uns angenommenen Konstanz von E und $M_i \bar{c}_p$ für die betrachteten Verbrennungen.

*) J. Chem. Soc. London 99, 1911.

Über die Abhängigkeit der unteren Zündgrenze von Temperatur und Druck kann theoretisch erst dann etwas Genaueres gesagt werden, wenn eine theoretische Formel für die Grenzgeschwindigkeit \bar{u} gegeben worden ist. \bar{u} wird von T_i und p_i abhängen, wenn auch nicht stark; vermutlich wird \bar{u} mit T_i steigen. Bei unserem qualitativen Schluß über das Wandern der unteren Zündgrenze bei Temperaturerhöhung haben wir stillschweigend angenommen, daß \bar{u} jedenfalls langsamer mit T_i steigt als proportional zu ihm⁹⁾.

Über die obere Zündgrenze können wir aus (56a) in derselben Weise Aussagen gewinnen wie für die untere Zündgrenze. Nur müssen wir beachten, daß unsere Näherungsformel (49) für die positive Wurzel der Gleichung (47) im Gebiet $\varepsilon > 1$ nicht besonders gut ist. Wir schreiben besser allgemein $\frac{b}{B'}$ an Stelle

des Näherungsausdruckes $\frac{1 + \frac{2}{\tau_r \sqrt{b}}}{\tau_r/2 \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4}{b}} \right)}$; die rechte Seite von (56a) und alle

Beziehungen (56a—57d) enthalten die Näherung (49) im übrigen nicht. $\frac{b}{B'}$ ist auch hier von τ_r und damit von ε , oder besser gesagt: von δ abhängig; wir befinden uns im Gebiet des Brennstoffüberschusses! An der Zündgrenze wird aber $\frac{b}{B'}$ sehr viel langsamer veränderlich sein mit τ_r , als $e^{-\tau_r}$; denn die Abnahme von $e^{-\tau_r}$ bewirkt das Kleinwerden der Geschwindigkeit u_i . Wir können jetzt alle Schlüsse nachmachen, die wir bei der Untersuchung der unteren Zündgrenze gemacht haben; denn auch noch an der oberen Zündgrenze ist die Molzahl des Brennstoffs gegenüber der Molzahl der Luft bei den Paraffinen selbst für Methan kleiner als $1/6$; für die höheren Paraffine ist sie noch kleiner, bei Heptan weniger als $1/10$. Dies gilt auch für die in der folgenden Tabelle 5 angegebenen Cycloparaffine und Olefine, bis auf Äthylen, wo sich für das betrachtete Verhältnis nur etwas weniger als $1/3$ ergibt. Man wird sich also nicht wundern, wenn Äthylen schlecht in die Regeln paßt, die für die übrigen Kohlenwasserstoffe an der oberen Zündgrenze gelten. Wirklich weichen die in Tabelle 5 angegebenen Werte für δ_0 , $\frac{Q' \sigma_s \cdot 100}{(1 - \sigma_s) \delta_0}$ und T_r bei Äthylen recht merklich von denen der übrigen Kohlenwasserstoffe ab.

Außerdem ist zu beachten, daß im Gebiet oberhalb des stöchiometrischen Punktes ($\sigma \geq \sigma_s$) δ in den Formeln an die Stelle von ε tritt. Einer geringen Änderung von δ würde bereits eine Änderung von \bar{u} um seine eigene Größenordnung entsprechen, können wir wieder schließen. Es muß also einen gut definierten Wert von τ_r geben, welcher der oberen Zündgrenze entspricht; er ist für alle Kohlenwasserstoffe der hier betrachteten Art praktisch gleich, weil die übrigen Glieder in (56a) von α fast nicht abhängen, wie wir uns bei der unteren Zündgrenze überlegt haben. Wir könnten diesen Wert von τ_r und das zugehörige $\delta = \delta_0$ der oberen Zündgrenze zu berechnen versuchen, wenn wir eine gute Näherungsformel für $\frac{b}{B'}$ hätten. Mit der Näherungsformel (49) würde sich mit $\bar{u} \approx 1$ cm/sec ergeben, daß δ_0 nahe an 1 liegt, was die Beobachtungen bestätigen. Aber die theoretischen δ_0 liegen zu nahe an 1. Wir können aber jedenfalls dies schließen: δ_0 muß wegen der angenäherten Konstanz von τ_r für alle Kohlenwasserstoffe angenähert

⁹⁾ Eine theoretische Untersuchung hat diese Annahme unterdessen bestätigt (Zusatz bei der Korrektur).

gleich sein, denn nach (56e) ist δ konstant, wenn τ_r es ist; T_i denken wir wieder fest gewählt (etwa gleich Zimmertemperatur), und a ist von der Art des Kohlenwasserstoffes nur wenig abhängig. Wir berechnen δ_0 aus den gemessenen σ_0 ; es ist $\delta_0 = 1 - \sigma_0$ nach der Definition von δ . In Tabelle 5 zeigen wir, daß dieses so berechnete δ_0 tatsächlich sehr genau konstant ist. Um zu beweisen, daß es hier wirklich auf δ , nicht auf ε ankommt, geben wir die ε_0 ebenfalls an. Diese sind keineswegs konstant, was theoretisch daran hängt (siehe (56a)), daß σ_s stark mit der Art des Kohlenwasserstoffes veränderlich ist. Schließlich geben wir $\frac{Q' \sigma_s}{(1 - \sigma_s) \delta_0}$ als Gegenstück zu dem $Q' \sigma_s \varepsilon_u = Q' \sigma_u$, das in Tabelle 4 stand, und T_r , das für $\varepsilon \geq 1$ nach (12b) und (56a) gegeben ist durch: $T_r = T_i + 300 a \delta$.

Tabelle 5
Obere Zündgrenze für Paraffine, Cycloparaffine, Olefine. $T_i = 300^\circ$ abs.

Verbindung	σ_0 beob.	δ_0	ε_0	$\frac{Q' \sigma_s \cdot 100}{(1 - \sigma_s) \delta_0}$ Q' in Cal	T_r ° abs
Methan	0,1500	0,94	1,57	2300	2140
Äthan	0,1245	0,93	2,20	2360	2220
Propan	0,0950	0,94	2,36	2330	2290
Butan	0,0841	0,95	2,68	2330	2340
Pentan	0,0780	0,95	3,05	2330	2360
Hexan	0,0690	0,95	3,19	2330	2370
Heptan	0,0600	0,96	3,20	2310	2380
Cyclopropan . .	0,1040	0,94	2,33	2370	2320
Cyclohexan . .	0,0835	0,94	3,66	2370	2360
Äthylen	0,2860	0,76	4,38	3080	1970
Propen	0,1110	0,93	2,48	2490	2360
Buten	0,0900	0,94	2,65	2440	2390

Die Tabelle zeigt:

1) An der oberen Zündgrenze hat δ für die hier betrachteten Kohlenwasserstoffe den praktisch konstanten Wert 0,94. Die Abweichung bei Äthylen ist verständlich, wir haben sie besprochen. Auch diese Regel gilt übrigens noch für andere Kohlenstoffverbindungen als die hier genannten; Benzol z. B. hat $\delta_0 = 0,96$. Eine systematische Durchmusterung der experimentellen Befunde nach den hier gegebenen theoretischen Gesichtspunkten soll einer anderen Arbeit vorbehalten bleiben. Hier kommt es mir darauf an, die Methode zu zeigen.

2) $\frac{Q' \sigma_s \cdot 100}{(1 - \sigma_s) \delta_0}$ ist einigermaßen konstant, und hat den Wert von etwa 2,3 bis $2,4 \cdot 10^4$, wenn man Q' in Cal pro Mol rechnet.

3) Die Temperatur T_r im Verbrannten ist wenig veränderlich und liegt in der Gegend von etwa 2300° — 2400° abs.

Regeln waren bisher für die obere Zündgrenze nicht bekannt und für die untere Zündgrenze nur Regel 3), so viel ich weiß.

Die Breite der Reaktionszone an der unteren Zündgrenze läßt sich nach (60) größenordnungsmäßig ausrechnen. Allgemein kann (60) in die Form gesetzt werden:

$$\Delta x \approx \frac{6 \lambda_0 (T_r - T_i) R T_i^{3/2}}{p_i u_i Q' \sigma_s \varepsilon} \approx \frac{3 \cdot 10^{-2} \lambda_0 (T_r - T_i) R T_i^{3/2}}{p_i^2 u_i Q' \sigma_s \varepsilon} \quad (62)$$

wobei p_l^* den Druck p_l in at bedeutet. An der unteren Zündgrenze ist für $T_l = 300^\circ$ abs nach unserer Überlegung: $T_r \approx 1520^\circ$ abs; $u_l' = u \approx 1$ cm/sec; $\bar{\varepsilon} = \varepsilon = \varepsilon_u \approx 0,55$; für $Q' \sigma_s$ können wir (51a) benützen. Das gibt für $p_l = 1$ at: $\Delta x_u \approx 0,9$ cm. An der unteren Zündgrenze ist die Breite der Reaktionszone von der Größenordnung 1 cm. Möglicherweise hängt damit die Erfahrungstatsache zusammen, daß bei Versuchen zur Bestimmung der unteren Zündgrenze die Weite des Versuchsrohres mindestens einige Zentimeter betragen muß, und daß die Zündgrenzen von der Gefäßgröße abhängen können; bei engeren Gefäßen zündet das Gemisch schlechter. Die Erscheinung hat aber wohl noch andere Gründe (Jost l. c. S. 126). Dieselbe theoretische Überlegung gilt auch für die obere Zündgrenze; $\bar{\varepsilon}$ ist nach der Erläuterung zu (58) hier gleich δ , also $\approx 0,94$.

Durch Druckerhöhung wird Δx kleiner; die Zündwilligkeit in engen Gefäßen muß also theoretisch steigen, wenn der Druck erhöht wird.

Nach dem gleichen Verfahren, wie es hier an der Kohlenwasserstoffverbrennung erläutert wurde, lassen sich auch andere Verbrennungen behandeln, speziell können für Verbrennungen von Verbindungen aus C, H, O die hier gegebenen Gleichungen der Kohlenwasserstoffverbrennung unmittelbar übernommen werden; natürlich gelten dann für σ_s und Q' etwas andere Formeln.

Mainz, Institut für theoretische Physik der Johannes Gutenberg-Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 1. November 1949.)

Dispersionsvermögen und Eigenschwingung eines ionisierten Gases

Von G. Burkhardt

Inhaltsübersicht

Aus der Lorentzschen Dispersionstheorie eines neutralen Gases kann diejenige für ein ionisiertes Gas (Plasma) gewonnen werden, wenn man die Eigenfrequenz der Polarisationselektronen gleich einer gewissen Grenzfrequenz setzt, die sich als Eigenfrequenz des schwingenden Plasmas erweist. Es ergibt sich damit zwanglos das Verschwinden des Lorentzschen Polarisationstermes in der Dispersionsformel für ein Plasma.

1. H. A. Lorentz hat erkannt, daß man zur Berechnung der Dispersion des Lichtes das Mitschwingen der Elektronen des betrachteten Mediums in einem erregenden Feld untersuchen muß, das sich aus der Vakuumfeldstärke am Ort des betreffenden Elektrons und einem durch die benachbarten polarisierten Atome hervorgerufenen Zusatzfeld zusammensetzt. Die Wirkung des letzteren kommt dann in der bekannten Lorentz-Lorentzschen Dispersionsformel zum Ausdruck und macht sich dann bemerkbar, wenn der Brechungsindex von 1 stärker abweicht, also für neutrale Medien bei hohen Dichten. Die Frage, ob dieses Lorentzsche Korrektionsglied auch bei ionisierten Medien anzubringen ist, wo es namentlich in der Nähe der kritischen Frequenz, für die der Brechungsindex gegen Null geht, von wesentlichem Einfluß ist, ist schon seit langem in der Literatur ausführlich diskutiert worden. Eine eingehende Beleuchtung dieser Frage und ihre Entscheidung in der Hinsicht, daß das Lorentzsche Glied bei der Dispersion in einem Plasma nicht auftritt, ist von C. G. Darwin¹⁾ gegeben worden. Trotzdem ist die Diskussion über dieses Problem, das namentlich für die Erforschung der Ionosphäre von Bedeutung ist, seither noch nicht verstummt und Darwins Ergebnisse wurden von mehreren Ionosphärenforschern teils von experimentellen Befunden her teils aus theoretischen Erwägungen angezweifelt²⁾. Es erscheint daher im Interesse einer hoffentlich endgültigen Klarstellung nicht unangebracht, das Problem nochmals nach einer mehr anschaulichen Methode zu behandeln; aus der das Verschwinden des viel diskutierten „Lorentz-Terms“ in einem ionisierten Medium klar hervorgeht.

Während nämlich Darwin in seinen Betrachtungen direkt von den Verhältnissen im Plasma ausgeht, muß es doch offenbar auch möglich sein, die Disper-

¹⁾ C. G. Darwin, Proc. Roy. Soc. London **146**, 17 (1934); **182**, 152 (1944).

²⁾ Eine Zusammenstellung der neueren Literatur findet sich z. B. bei J. Zenneck, Hochfrequenztechn. u. Elektroak. **60**, 109 (1942). Die Arbeit von J. Malsch, Arch. elektr. Übertr. **2**, 231 (1948) geht an dem entscheidenden Problem vorbei, die dort berechneten Debye'schen Relaxationskräfte sind in einem Plasma sicher zu vernachlässigen.

sionstheorie für ein ionisiertes Gas aus einem Grenzübergang vom neutralen Gas her zu entwickeln, indem man die Bindung und damit die Eigenfrequenz der mitschwingenden Elektronen zu immer kleineren Werten übergehen läßt. Dies soll im Folgenden gezeigt werden.

2. Aus den Maxwell'schen Gleichungen folgt für ein Medium mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ und der Leitfähigkeit σ :

$$\Delta \mathfrak{E} = \frac{1}{c^2} (\ddot{\mathfrak{E}} + 4\pi \mathfrak{P}) + \frac{4\pi \sigma}{c^2} \dot{\mathfrak{E}},$$

oder für eine monochromatische, linearpolarisierte Lichtwelle $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}_0 e^{i\omega t}$ und mit

$$\mathfrak{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \mathfrak{E} = N \alpha \mathfrak{E}$$

$$\Delta \mathfrak{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + 4\pi N \alpha - i \frac{4\pi \sigma}{\omega} \right) \mathfrak{E}_0 = 0. \quad (1)$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck stellt also das Quadrat des komplexen Brechungsindex $n = n(1 - i\kappa)$ des betreffenden Mediums dar.

Betrachten wir zunächst ein Gas aus neutralen Atomen der Dichte N , der Einfachheit halber mit je einem „Polarisationselektron“ der Eigenfrequenz ω_0 , so ist $\sigma = 0$ und die Polarisierbarkeit α berechnet sich aus dem mittleren Dipolmoment $\bar{p} = \alpha \mathfrak{E} = e \bar{x}$ aller Atome. Für ein Polarisationselektron lautet die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} \left(\mathfrak{E} + \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P} \right), \quad (2)$$

wobei $\frac{4\pi}{3} \mathfrak{P} = \frac{4\pi}{3} N e \bar{x}$ nach Lorentz das durch die übrigen polarisierten Atome hervorgerufene Zusatzfeld am Ort des herausgegriffenen Elektrons ist. Diese Gleichung wollen wir über ein Gebiet mitteln, das viele Atome enthält, aber noch klein gegenüber der Wellenlänge des anregenden Feldes ist. Dazu müssen wir noch die Zusammenstöße der Atome untereinander berücksichtigen.

Durch einen „Stoß“ soll im Sinne von Lorentz Lage und Geschwindigkeit des betreffenden Polarisationselektrons beliebig verändert werden, so daß der Mittelwert dieser Größen nach dem Stoß verschwindet. Betrachten wir also die Gruppe von Atomen, die zur Zeit $t = \tau$ ihren letzten Zusammenstoß erlitten haben und bezeichnen wir den Mittelwert der Lage und Geschwindigkeit ihrer Polarisationselektronen zur Zeit t mit $\tilde{x}(t, \tau)$ bzw. $\dot{\tilde{x}}(t, \tau) = \dot{\tilde{x}}(t, \tau)$, so gilt:

$$\tilde{x}(\tau, \tau) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\tilde{x}}(\tau, \tau) = 0. \quad (3)$$

Es sei nun die mittlere Stoßzahl pro sec γ , dann ist die Zahl der Atome, die zur betrachteten Gruppe gehören, zur Zeit t proportional $e^{-\gamma(t-\tau)}$ und die (durch einfache Überstreichung gekennzeichneten) Mittelwerte über alle Atome unseres Gebietes erhält man aus:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-\tau)} \tilde{x}(t, \tau) d\tau \\ \dot{\bar{x}}(t) &= \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-\tau)} \dot{\tilde{x}}(t, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Durch Differentiation nach t folgt daraus wegen (3)

$$\dot{\bar{x}} = \bar{x} - \gamma \bar{x} \quad (5)$$

und

$$\ddot{\bar{x}} = \frac{d}{dt} \bar{x} - \gamma \dot{\bar{x}} = \bar{x} - 2\gamma \dot{\bar{x}} - \gamma^2 \bar{x}. \quad (6)$$

Mittelt man nun (2) über das betrachtete Volumen und setzt nach (6) ein, so erhält man für die mittlere Verschiebung die Gleichung:

$$\ddot{\bar{x}} + 2\gamma \dot{\bar{x}} + (\gamma^2 + \omega_0^2) \bar{x} = \frac{e}{m} \left(\mathcal{E} + \frac{4\pi}{3} N e \bar{x} \right). \quad (7)$$

Hieraus findet man durch Integration sofort die Polarisierbarkeit α und damit nach (1) den Brechungsindex n unseres Gases. Für $\gamma \ll \omega_0$ wird

$$n^2 - 1 = n^2 (1 - \kappa^2) - i 2 n^2 \kappa = \frac{4\pi N e^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{4\pi}{3} \frac{N e^2}{m} - i 2\gamma \omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{4\pi}{3} \frac{N e^2}{m} \right)^2 + (2\gamma \omega)^2}. \quad (8)$$

Diese Ableitung findet sich natürlich schon in ähnlicher Form in den klassischen Abhandlungen von Lorentz.

Man möchte zunächst vermuten, daß man in dieser für ein neutrales Gas gültigen Dispersionsformel nur $\omega_0 = 0$ zu setzen hat, um diejenige für ein Plasma zu erhalten, kommt dann aber offensichtlich auf einen falschen Ausdruck, der das Lorentzsche Zusatzglied enthält. Tatsächlich aber verliert der Begriff der Polarisierbarkeit, auf dem (8) basiert, für $\omega_0 \rightarrow 0$ seine Bedeutung. Der Übergang vom „Polarisationselektron“, das einem bestimmten Atomrumpf zugeordnet werden kann, zum „freien“ Elektron erfolgt nämlich bei einem Gas endlicher Dichte dann, wenn die von seinem Atomrumpf auf das Elektron wirkenden Bindungskräfte von der gleichen Größe werden wie das von den polarisierten Atomen der Umgebung herrührende Feld, im Sinne unseres Oszillatormodells also dann, wenn

$$m \omega_0^2 \bar{x} = \frac{4\pi}{3} N e^2 \bar{x}.$$

Es ergibt sich also eine endliche untere Grenze für die Eigenfrequenz der Polarisationselektronen:

$$\omega_P = \sqrt{\frac{4\pi}{3} \frac{N e^2}{m}}. \quad (9)$$

Wir stützen dieses Ergebnis noch durch die folgende heuristische korrespondenzmäßige Betrachtung: Die Eigenfrequenz eines Atoms in der Nähe seiner Ionisierungsgrenze ist durch die klassische Umlauffrequenz seines Leuchtelektrons auf seiner Bohrschen Bahn vom Radius a gegeben, sie berechnet sich also aus

$$m a \omega_0^2 = \frac{e^2}{a^2}.$$

Der größte Bahnradius, bei dem noch eine Zuordnung des Elektrons zu einem bestimmten Atom möglich ist wird durch $\frac{4\pi}{3} a^3 = \frac{1}{N}$ bestimmt, durch Einsetzen

folgt wieder der Wert (9) als untere Grenze der Eigenfrequenz eines gebundenen Elektrons.

In der Tat gehen für diesen Wert von ω_0 die oben abgeleiteten Beziehungen in die Dispersionstheorie für ein ionisiertes Medium über. Setzt man nämlich ω_0 nach Gl. (9) in die Bewegungsgleichung (7) ein und führt außerdem statt \bar{x} den Mittelwert der Geschwindigkeit \bar{x} über alle Elektronen nach (5) und (6) ein, so fallen in (7) alle Glieder, die \bar{x} enthalten, heraus und man erhält

$$\frac{d}{dt} \bar{x} + \gamma \bar{x} = \frac{e}{m} \mathfrak{E}$$

oder mit $j = N e \bar{x}$

$$\frac{dj}{dt} + \gamma j = \frac{N e^2}{m} \mathfrak{E}. \quad (10)$$

Dies ist aber die Gleichung für den durch das Feld \mathfrak{E} der Lichtwelle erregten Strom der freien Elektronen — das Lorentzsche Zusatzfeld hat sich zwanglos herausgehoben! — mit der Lösung

$$(\gamma + i \omega) j = \frac{N e^2}{m} \mathfrak{E}.$$

An die Stelle der Polarisierbarkeit α ist die Leitfähigkeit σ getreten:

$$\sigma = \frac{N e^2}{m} \frac{\gamma - i \omega}{\omega^2 + \gamma^2} \quad (11)$$

und nach (1) ergibt sich die Dispersionsformel für das Plasma

$$n^2 - 1 = - \frac{4 \pi N e^2}{m} \frac{1 + i \frac{\gamma}{\omega}}{\omega^2 + \gamma^2}, \quad (12)$$

aus der das Lorentzsche Polarisationsglied verschwunden ist. Phänomenologisch verhält sich also das Plasma hinsichtlich seiner Dispersionseigenschaften wie ein Medium mit $\epsilon = 1$ (die Polarisierbarkeit der Ionen kann unberücksichtigt bleiben) und mit komplexer Leitfähigkeit, wobei die Dispersion durch einen induktiven Widerstand $\omega L = \omega \frac{m}{N e^2}$, die Absorption durch einen Ohmschen

Widerstand $R = \gamma \frac{m}{N e^2}$ der durch das Lichtwellenfeld erregten Stromdichte j zustande kommt³⁾.

Trotz dieser anderen Deutung geht die Dispersionsformel (12) unmittelbar aus der für ein neutrales Gas geltenden Formel (8) hervor, wenn man in dieser für ω_0 den oben berechneten Grenzwert einsetzt. Nur das Dämpfungsglied ist in beiden Fällen verschieden, indem γ beim neutralen Gas sich auf die auslöschenden Stöße der Atome, beim ionisierten dagegen auf die der Elektronen mit den Ionen bezieht. Zu beachten ist, daß der Faktor 2 im Dämpfungsglied bei den freien Elektronen wegfällt, der Energieverlust des Strahlungsfeldes pro Zusammenstoß also beim neutralen Gas doppelt so groß ist wie beim ionisierten. Der Strahlungsverlust pro Stoß ist aber gleich der vom Strahlungsfeld am mitschwingenden Elektron

³⁾ s. a. W. O. Schumann, Z. Physik **121**, 7 (1943).

zwischen 2 Zusammenstößen geleisteten Arbeit, welche im ersteren Falle

$$\frac{1}{\gamma'} (\dot{p}, \mathfrak{E}) = \frac{e}{\gamma'} (\dot{x}, \mathfrak{E})$$

beträgt, im letzteren dagegen

$$\frac{1}{N\gamma'} (\dot{j}, \mathfrak{E}) = \frac{e}{\gamma'} (\dot{x}, \mathfrak{E})$$

beides zeitlich gemittelt. Der Unterschied um den Faktor 2 ergibt sich aus der verschiedenartigen Mittelbildung in beiden Fällen und der dadurch bedingten unterschiedlichen Phasenbeziehung zwischen dem Polarisationsstrom $N\dot{p}$ bzw. dem Leitungsstrom \dot{j} und \mathfrak{E} .

Auf Grund dieser Überlegung läßt sich übrigens auch die Dämpfungskonstante γ für ein Plasma direkt berechnen. Die vom Strahlungsfeld pro sec auf die Elektronen übertragene Energie (\dot{j}, \mathfrak{E}) wird nämlich durch die Zusammenstöße wieder als Strahlungsenergie abgegeben, da infolge des großen Massenunterschiedes zwischen Elektron und Ion praktisch keine kinetische Energie übertragen wird. Diese als „Bremsstrahlung“ emittierte Energie kann aber nach der Kramerschen Theorie des Röntgenbremsspektrums berechnet werden. Bei thermischem Gleichgewicht müssen Energieverlust und Emission in gleichen Frequenzintervallen einander gleich sein⁴⁾ und man erhält durch diesen Vergleich:

$$\gamma = \frac{16\pi^2}{3} \frac{N_i e^4}{m^{3/2} (2\pi k T)^{1/2}} \ln \frac{k T}{1,44 e^2 N_i^{1/2}} \quad (13)$$

für die Stoßzahl der „auslöschenden“ Stöße in einem Plasma, welche (bis auf einen unwesentlichen Zahlenfaktor im Logarithmus) genau mit dem von Chapman und Cowling⁵⁾ auf anderem Wege berechneten Wert übereinstimmt (N_i = Iondichte). Es ist damit der Zusammenhang zwischen der korrespondenzmäßigen Theorie des Absorptionskoeffizienten für frei-frei-Übergänge von Kramers und der Lorentzschen Stoßdämpfungstheorie hergestellt.

3. Es soll nun noch gezeigt werden, daß der oben berechnete Grenzwert ω_p für die Eigenfrequenz der Polarisationselektronen als Eigenfrequenz für freie Plasmaschwingungen gedeutet werden kann. Dazu betrachten wir die Bewegung des Ladungsschwerpunktes der Elektronen gegenüber dem der Ionen in einem durch eine Kugel vom Radius R abgegrenzten Gebiet des Plasmas. Diese Kugel enthalte Q Elektronen und ebenso viele einfach geladene positive Ionen, letztere werden wir mit Darwin (l. c.) als ruhend und — zur Berechnung der Kräfte — kontinuierlich über das Kugellinnere verteilt annehmen. Die Berechtigung dieser Näherung wird bei Darwin ausführlich diskutiert, sie beruht im wesentlichen darauf, daß zur Berechnung des zeitlichen Mittelwertes der Kräfte auf ein Elektron die zeitlich kurze Wirkung des nahen Vorübergangs an einem Ion gegenüber der Wirkung der vielen Teilchen in größerer Entfernung zu vernachlässigen ist. Das Potential der positiven Ladungen in einer Entfernung r vom Mittelpunkt der Kugel beträgt dann

$$V(r) = Q e \frac{3R^2 - r^2}{2R^3}$$

⁴⁾ s. a. G. Burkhardt u. A. Schlüter, Z. Astrophysik im Druck.

⁵⁾ Cowling, Proc. Roy. Soc. London 183, 453 (1945).

und die Bewegungsgleichung für ein an der Stelle \mathbf{r}_i befindliches Elektron lautet:

$$m \ddot{\mathbf{r}}_i = -\frac{Q e^2}{R^3} \mathbf{r}_i - \text{grad}_i \left(\sum_{k \neq i} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|} \right).$$

Sie gilt unabhängig davon, ob sich das Plasma außerhalb der Kugel bis ins Unendliche fortgesetzt oder ob es durch diese begrenzt wird. Wir mitteln diese Gleichung über das Kugelvolumen nach dem gleichen Verfahren, das wir oben bei Gl. (7) angewendet haben, in dem wir zur Berechnung der Dämpfung auch wieder die Zusammenstöße von Elektronen und Ionen berücksichtigen, jedoch mit dem Unterschied, daß hier der Mittelwert der Lagekoordinaten $\bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{Q} \sum \mathbf{r}_i$ durch die Stöße nicht beeinflusst wird und nur das Gruppenmittel der Geschwindigkeit $\dot{\bar{\mathbf{r}}}$ nach dem Stoß Null wird, so daß wir erhalten:

$$\dot{\bar{\mathbf{r}}} = \frac{1}{Q} \sum \dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\bar{\mathbf{r}}} = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-\tau)} \ddot{\bar{\mathbf{r}}} d\tau$$

und

$$\frac{d}{dt} \dot{\bar{\mathbf{r}}} = \ddot{\bar{\mathbf{r}}} = \dot{\bar{\mathbf{r}}} - \gamma \dot{\bar{\mathbf{r}}}.$$

Damit gilt für eine beliebige Komponente des Ladungsschwerpunktes der Elektronen:

$$\ddot{\bar{x}} + \gamma \dot{\bar{x}} + \frac{Q e^2}{m R^3} \bar{x} = 0. \quad (14)$$

Unsere Plasmakugel verhält sich also wie ein harmonischer Oszillator mit der Dämpfungskonstante γ , ihre Eigenfrequenz wird mit $Q = \frac{4\pi}{3} R^3 N$

$$\omega_P = \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{3 m}}$$

in Übereinstimmung mit dem oben gefundenen Grenzwert. Führt man wieder den Mittelwert der Stromdichte $\dot{j} = N e \dot{\bar{x}}$ ein, so gilt für diese die aus (14) durch Differentiation nach t folgende Schwingungsgleichung:

$$\frac{\partial^2 \dot{j}}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \dot{j}}{\partial t} + \frac{4\pi N e^2}{3 m} \dot{j} = 0.$$

Im Gegensatz zu der von Langmuir gefundenen longitudinalen Raumladungsschwingung der Frequenz $\sqrt{\frac{4\pi N e^2}{m}}$ handelt es sich hier um eine transversale Schwingung des Plasmas mit $\text{div } \dot{j} = 0$.

Wollen wir nun von der Gl. (14) der freien Schwingung wieder übergehen zu der erzwungenen Schwingung unseres Gebietes durch eine ebene Lichtwelle \mathcal{E} , so müssen wir den Radius der betrachteten Plasmakugel klein gegenüber der Wellenlänge der anregenden Lichtwelle wählen. Dann erzeugt aber das umgebende Plasma im Innern der Kugel ein zusätzliches Feld, von der Größe $\frac{4\pi}{3} \mathcal{P}$, das von der durch das angelegte Feld auf der Oberfläche der Kugel induzierten Flächenladung herrührt. (Zu dem auf ein Elektron der Kugel wirkenden, oben berechneten

Feld der übrigen Ladungsträger in der Kugel kommt das im Inneren der hohl gedachten Kugel von der Umgebung herrührende Feld hinzu!) Somit geht (14) über in:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \frac{4\pi}{3} \frac{N e^2}{m} \bar{x} = \frac{e}{m} \left(\mathfrak{E} + \frac{4\pi}{3} N e \bar{x} \right),$$

was unter Einführung der Stromdichte j wieder auf unsere Gl. (10) führt. In Übereinstimmung mit den in Ziffer 2. gemachten Ausführungen kann man also das Plasma sich durch ein System von gedämpft schwingenden harmonischen Oszillatoren mit der Eigenfrequenz ω_p ersetzt denken. Die scheinbar ganz anders gearteten Überlegungen Darwins in seiner 2. Arbeit (l. c.) bestätigen unsere mehr heuristischen Betrachtungen auf das beste. Er zeigt dort durch eine genaue Analyse der Bahnen der Elektronen bei einem Stoß, daß durch diese Stöße im Mittel auf ein Elektron eine zusätzliche Kraft der Größe $-\omega_p^2 \bar{x}$ wirkt, wobei \bar{x} die mittlere Verschiebung durch irgendwelche äußere Einwirkung darstellt in voller Übereinstimmung mit den obigen Ableitungen.

4. Zum Schluß sei noch eine Bemerkung über den Energieinhalt des elektromagnetischen Feldes in einem Plasma angeführt. Da nach unseren obigen Betrachtungen für das Plasma $\varepsilon = 1$ gesetzt werden muß, ist die Feldenergie pro cm^3 durch

$$U = \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)$$

gegeben. Da der Brechungsindex n unseres Mediums aber von 1 verschieden ist, scheint dies im Widerspruch zu dem üblichen Wert $\frac{n^2}{4\pi} \overline{\mathfrak{E}^2}$ für die Strahlungsenergie zu stehen, wo $\overline{\mathfrak{E}^2} = \frac{1}{2} \mathfrak{E}_0^2$ den zeitlichen Mittelwert des Amplitudenquadrats darstellt. In der Tat geht aber ein Teil der Feldenergie als magnetische Energie des induzierten Stromes dem Strahlungsfeld verloren. Nach der Maxwell'schen Theorie beträgt diese:

$$U_{\text{magn.}} = \frac{1}{2} L j^2.$$

Aus unseren obigen Ableitungen [Gln. (10) bis (11)] folgt aber für den „Selbstinduktionskoeffizienten“

$$L = \frac{m}{N e^2}$$

und für den zeitlichen Mittelwert von j^2

$$\bar{j}^2 = \left(\frac{N e^2}{m} \right)^2 \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} \overline{\mathfrak{E}^2}.$$

Ferner folgt für die magnetische Feldstärke unserer ebenen in der z -Richtung fortschreitenden Lichtwelle:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_y = n \sqrt{1 + \kappa^2} e^{-i\delta} \mathfrak{E}_x; \quad \text{tg } \delta = \kappa$$

also

$$\overline{\mathfrak{H}^2} = n^2 (1 + \kappa^2) \overline{\mathfrak{E}^2}.$$

Somit bleibt für die Energiedichte des Strahlungsfeldes im Plasma, gemittelt über die Zeit:

$$U_{\text{Str.}} = \frac{1}{8\pi} \overline{\mathfrak{E}^2} \left(1 + n^2 (1 + \kappa^2) - \frac{8\pi}{2} \frac{N e^2}{m} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} \right).$$

Da aber nach (12)

$$1 - \frac{4\pi N e^2}{m} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} = n^2 (1 - \kappa^2),$$

o folgt schließlich:

$$U_{\text{str.}} = \frac{n^2}{4\pi} \overline{\mathcal{E}^2},$$

also derselbe Wert, der sich auch bei einem nichtleitenden Medium mit dem Brechungsindex n ergibt.

Die in dieser Arbeit niedergelegten Überlegungen sind teilweise aus gemeinsamen Diskussionen mit Herrn A. Schlüter aus Göttingen entstanden, dem ich hiermit danken möchte.

Kiel, Institut für theoretische Physik der Neuen Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 17. Oktober 1949.)

Über den Einfluß von Drehfeldern auf den Ordnungszustand von Molekülen in Gasen und Flüssigkeiten¹⁾ (Rotationsdoppelbrechung)

Von Artur Lösche

(Mit 10 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Es wird gezeigt, daß in Gasen und Flüssigkeiten, deren Elementarteilchen zu Rotationen um parallele Achsen gezwungen werden, eine zusätzliche Orientierung auftritt, wenn das Trägheitsellipsoid nicht rotationssymmetrisch ist. Diese Orientierung macht sich im Makroskopischen durch eine Doppelbrechung bemerkbar.

Die Messungen an Flüssigkeiten in elektrischen Drehfeldern stimmen qualitativ mit den erwarteten Ergebnissen überein. Unter gewissen Annahmen lassen sich aus den Abweichungen Rückschlüsse über die Größe von Assoziationskomplexen ziehen.

Heuristische Überlegungen

Bei gegebener Drehzahl besitzt die Rotationsenergie eines Kreiselers dann ihr Maximum, wenn sich der Körper um die Achse des maximalen Trägheitsmomentes dreht. Werden daher irgendwelche Teilchen durch ein Drehfeld konstanter Frequenz in Rotation versetzt, so werden diese, wenn die Lage derselben nicht durch andere Kräfte festgelegt wird, bestrebt sein, eine Rotation um diese Achse des maximalen Trägheitsmomentes auszuführen. Unter den Molekülen einer Substanz wird dadurch eine gewisse Ordnung hervorgerufen werden; sind diese Moleküle außerdem optisch anisotrop, so wird sich die Ordnung im Makroskopischen durch eine Doppelbrechung bemerkbar machen. Das Ziel dieser Arbeit ist es, zunächst die Größe dieser Doppelbrechung zu berechnen und dann die experimentellen Möglichkeiten zu ihrer Erzeugung zu untersuchen. Es ist zu erwarten, daß sich aus dem Vergleich von Theorie und Experiment späterhin Schlüsse über den inneren Mechanismus insbesondere von Flüssigkeiten ziehen lassen.

I. Theoretischer Teil

1. Berechnung der Doppelbrechung bei reiner Rotation

Die Rechnungen gelten vorläufig nur für den Zustand eines idealen Gases; auf die Verhältnisse bei Flüssigkeiten soll später eingegangen werden. Alle Größen werden in Einheiten des absoluten, elektrostatischen Maßsystems angegeben; Di-

¹⁾ D 15; stark gekürzte Leipziger Dissertation.

mensionen werden daher auch bei den folgenden numerischen Rechnungen nicht geschrieben.

Man kann alle charakteristischen Größen eines Moleküls auf ein mit dem Molekül fest verbundenes Koordinatensystem ξ, η, ζ beziehen, das rechtwinklig ist. Wirkt auf das Molekül ein elektrisches Feld der Stärke 1, so wird im Molekül ein elektrisches Moment mit den Komponenten $m_{1\xi} = b_\xi \cdot \mathcal{E}_{1\xi}$, $m_{1\eta} = b_\eta \cdot \mathcal{E}_{1\eta}$, $m_{1\zeta} = b_\zeta \cdot \mathcal{E}_{1\zeta}$ induziert; da nach Voraussetzung $\mathcal{E}_{1\xi}^2 + \mathcal{E}_{1\eta}^2 + \mathcal{E}_{1\zeta}^2 = 1$ ist, folgt

$$\frac{m_{1\xi}^2}{b_\xi^2} + \frac{m_{1\eta}^2}{b_\eta^2} + \frac{m_{1\zeta}^2}{b_\zeta^2} = 1. \quad (1)$$

b_ξ, b_η, b_ζ sind dann die Hauptpolarisierbarkeiten und Gl. (1) ist die Definitionsgleichung für das Polarisierbarkeitsellipsoid nach Stuart, Volckmann²⁾, wenn \mathcal{E}_1 hier die elektrische Feldstärke einer Lichtwelle bedeutet. Die statischen Polarisierbarkeiten $\alpha_\xi, \alpha_\eta, \alpha_\zeta$ lassen sich nach Gans auf dasselbe Hauptachsensystem beziehen³⁾. Weiterhin folgt aus der Silbersteinschen Theorie der Polarisierbarkeiten⁴⁾, daß auch die Hauptträgheitsachsen mit demselben Koordinatensystem zusammenfallen; I_ξ, I_η, I_ζ seien die drei Hauptträgheitsmomente des Moleküls.

Die Lage dieses molekülfesten Koordinatensystems zu einem äußeren, raumfesten System x, y, z ist durch die Richtungskosinus α_{ik} gegeben, die sich auch durch die drei Eulerschen Winkel ausdrücken lassen.

Tabelle der Richtungskosinus				Zusammenhang zwischen den Richtungskosinus und den Eulerschen Winkeln			
	ξ	η	ζ		ξ	η	ζ
x	α_{11}	α_{21}	α_{31}	x	$\cos \Phi \cos \psi$ $-\sin \Theta \sin \psi \cos \Theta$	$-\cos \Phi \sin \psi$ $-\sin \Theta \cos \psi \cos \Theta$	$\sin \Phi \sin \Theta$
y	α_{12}	α_{22}	α_{32}	y	$\sin \Phi \cos \psi$ $+\cos \Phi \sin \psi \cos \Theta$	$-\sin \Phi \sin \psi$ $+\cos \Phi \cos \psi \cos \Theta$	$-\cos \Phi \sin \Theta$
z	α_{13}	α_{23}	α_{33}	z	$\sin \psi \sin \Theta$	$\cos \psi \sin \Theta$	$\cos \Theta$

(2, b)

Um den orientierenden Einfluß der Rotation auf die Moleküle feststellen zu können, sind zunächst die mittleren Polarisierbarkeiten $\bar{b}_x, \bar{b}_y, \bar{b}_z$ in Richtung der raumfesten Achsen zu berechnen. Dazu benötigt man die Wahrscheinlichkeit, mit welcher ein Molekül eine bestimmte Lage einnimmt. Nach den Prinzipien der klassischen Boltzmann-Statistik beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß sich ein Molekül im Gebiet $dp \cdot dq$ des Phasenraumes befindet, im stationären Gleichgewicht

$$W = \frac{1}{c} \cdot e^{-\frac{H}{k\theta}} dp dq \quad \text{mit} \quad C = \int \dots \int e^{-\frac{H}{k\theta}} dp dq. \quad (3)$$

H ist als Funktion der kanonisch konjugierten Variablen p_i, q_i (abkürzend ist im Folgenden nur p, q geschrieben) die Hamilton-Funktion, d.h. die Gesamtenergie des Systems, k die Boltzmann-Konstante und θ die absolute Tem-

²⁾ Stuart, Volckmann, Z. Physik **80**, 107 (1933).

³⁾ Gans, Ann. Physik **64**, 382 (1921).

⁴⁾ Silberstein, Philos. Mag. **33**, 92 (1922).

peratur; C bezeichnet man als Zustandssumme. Der Mittelwert einer Funktion folgt hieraus zu

$$\overline{f(p, q)} = \frac{1}{C} \int \cdots \int f(p, q) \cdot e^{-\frac{H}{k\theta}} dp dq. \quad (4)$$

Ist Z der elektrische Vektor einer parallel zur z -Achse schwingenden Lichtwelle, so wird dadurch am Molekül ein Moment $m_\xi = b_\xi \alpha_{13} \cdot Z$, $m_\eta = b_\eta \alpha_{23} \cdot Z$, $m_z = b_z \alpha_{33} \cdot Z$ induziert, welches in Richtung der z -Achse ein resultierendes Moment erzeugt von der Größe

$$m_z = (b_\xi \cdot \alpha_{13}^2 + b_\eta \cdot \alpha_{23}^2 + b_z \cdot \alpha_{33}^2) \cdot Z.$$

Entsprechende Werte ergeben sich für m_y und m_x ; setzt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} B_x &= b_\xi \cdot \alpha_{11}^2 + b_\eta \cdot \alpha_{21}^2 + b_z \cdot \alpha_{31}^2 \\ B_y &= b_\xi \cdot \alpha_{12}^2 + b_\eta \cdot \alpha_{22}^2 + b_z \cdot \alpha_{32}^2 \\ B_z &= b_\xi \cdot \alpha_{13}^2 + b_\eta \cdot \alpha_{23}^2 + b_z \cdot \alpha_{33}^2 \end{aligned} \quad (5)$$

und führt man die mittleren Polarisierbarkeiten \bar{b}_x , \bar{b}_y , \bar{b}_z ein mit $\bar{m}_x = \bar{b}_x \cdot X$, $\bar{m}_y = \bar{b}_y \cdot Y$, $\bar{m}_z = \bar{b}_z \cdot Z$, so erhält man

$$\bar{b}_x = \frac{1}{C} \int \cdots \int B_x \cdot e^{-\frac{H}{k\theta}} dp dq \text{ und entsprechend } \bar{b}_y \text{ und } \bar{b}_z. \quad (6)$$

Nunmehr ist die Hamiltonfunktion zu berechnen. Die Translationsenergie der Moleküle hat keinen Einfluß auf die Orientierung und kann von vornherein weggelassen werden. Die potentielle und die kinetische Energie der elastischen Schwingungen H_1 und H_2 sowie die kinetische Energie der freien Rotation H_3 haben, wie Van Vleck⁵⁾ gezeigt hat, ebenfalls keinen Einfluß auf einen Mittelwert der gesuchten Art. Es ist dabei

$$H_3 = \frac{1}{2} (I_\xi \omega_\xi^2 + I_\eta \omega_\eta^2 + I_z \omega_z^2). \quad (7)$$

Schließlich kommt noch die Energie der Moleküle bei der aufgezwungenen Rotation in Betracht. Die kinetische Energie eines mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Kreisels beträgt

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega^2 (I_\xi \alpha_{11}^2 + I_\eta \alpha_{21}^2 + I_z \alpha_{31}^2). \quad (8)$$

Dabei ist als Rotationsachse — hieran soll im Folgenden stets festgehalten werden — die x -Achse gewählt worden. Schreibt man dafür $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega^2 (I_\xi \cos^2(x, \xi) + I_\eta \cos^2(x, \eta) + I_z \cos^2(x, \zeta))$, so liegt der Maximalwert bei $(x, \xi) = 0$ und $(x, \eta) = (x, \zeta) = \pi/2$, wie sich aus $\delta T_{\text{rot}} = 0$ für $I_\xi > I_\eta \geq I_z$ ergibt. Die Rotationsenergie nimmt also bei Drehung um die Hauptachse des Moleküls mit dem größten Trägheitsmoment ihren Maximalwert an. Bei einer anderen Lage des Moleküls beträgt die Energie nur noch $\frac{1}{2} \omega^2 (I_{\text{max}} - I_\xi \alpha_{11}^2 - I_\eta \alpha_{21}^2 - I_z \alpha_{31}^2)$. Der erste Bestandteil dieses Ausdrucks $\frac{1}{2} \omega^2 \cdot I_{\text{max}}$ ist konstant und liefert für den gesuchten Mittelwert keinen Beitrag; er kann daher unberücksichtigt bleiben. Somit ist der maßgebende Anteil der erzwungenen Rotation an der Hamiltonfunktion

$$H_4 = -\frac{\omega^2}{2} (I_\xi \alpha_{11}^2 + I_\eta \alpha_{21}^2 + I_z \alpha_{31}^2). \quad (9)$$

⁵⁾ Van Vleck, Dielectric and magnetic susceptibilities, Oxford 1932.

Der wesentliche Unterschied zwischen H_3 und H_4 liegt also darin, daß H_3 von den momentanen Drehimpulsen des Moleküls und H_4 nur von der Richtung des Moleküls abhängt (ω ist ja konstant). Man kann daher H_4 als eine „quasipotentielle“ Energie bezeichnen. Dies entspricht auch ihrem aus der Weiterführung dieser Rechnung folgenden Einfluß auf die Orientierung. Somit ergibt sich

$$\bar{b}_x = \frac{1}{C} \int \cdots \int B_x e^{-\frac{H_4}{k\theta}} dp dq \text{ und entsprechend } \bar{b}_y \text{ und } \bar{b}_z. \quad (10)$$

Dabei sind die Richtungskosinus α_{ik} und die ω_i als Funktionen der Eulerschen Winkel und der kanonisch konjugierten Impulse darzustellen. (Der kürzeren Schreibweise wegen wird weiterhin α_{ik} geschrieben, wobei aber diese α_{ik} immer als Funktionen der Eulerschen Winkel zu denken sind.) Führt man diese Überlegungen im einzelnen vollständig durch, so erhält man schließlich

$$\bar{b}_x = \frac{\iiint B_x \cdot e^{-\frac{H_4}{k\theta}} \sin \Theta d\Phi d\varphi d\Theta}{\iiint e^{-\frac{H_4}{k\theta}} \sin \Theta d\Phi d\varphi d\Theta}. \quad (11)$$

Die geschlossene Darstellung dieser hier auftretenden Integrale ist nicht möglich. Da es sich auch bei diesem Effekt um kleine Größen handelt und man noch längst nicht in das Gebiet der Sättigung kommt (s. später!), genügt es, wenn man die Exponentialfunktion in eine Reihe entwickelt und hiervon nur die ersten beiden Glieder berücksichtigt. Vernachlässigt man aus dem gleichen Grund auch höhere Potenzen als quadratische, so ergibt sich nach ziemlich langwieriger Rechnung schließlich

$$\bar{b}_x = \frac{b_\xi + b_\eta + b_\zeta}{3} + 2 \cdot \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{1}{45 k \theta} ((I_\xi - I_\eta) (b_\xi - b_\eta) + (I_\eta - I_\zeta) (b_\eta - b_\zeta) + (I_\zeta - I_\xi) (b_\zeta - b_\xi)).$$

Führt man zur Abkürzung eine den Einfluß der Verschiedenheit der Hauptträgheitsmomente wiedergebende Größe Θ_4 ein (Θ_3 wird in der Literatur üblicherweise als Glied der elektrischen Sättigung benutzt), wobei

$$\Theta_4 = \frac{1}{45 k \theta} ((I_\xi - I_\eta) (b_\xi - b_\eta) + (I_\eta - I_\zeta) (b_\eta - b_\zeta) + (I_\zeta - I_\xi) (b_\zeta - b_\xi)) \quad (12)$$

ist, so läßt sich die mittlere Polarisierbarkeit in Richtung der Rotationsachse in folgender Form darstellen:

$$\bar{b}_x = \frac{b_\xi + b_\eta + b_\zeta}{3} + 2 \Theta_4 \cdot \frac{\omega^2}{2}. \quad (13a)$$

Die mittleren Polarisierbarkeiten parallel zur y - und z -Achse sind, da die Rotationsachse die einzige ausgezeichnete Richtung ist, gleich groß.

$$\bar{b}_y = b - \Theta_4 \cdot \frac{\omega^2}{2} = \bar{b}_z \quad (13b)$$

mit

$$b = \frac{b_\xi + b_\eta + b_\zeta}{3}. \quad (13c)$$

Aus diesen Größen erhält man die gesuchte Doppelbrechung mit Hilfe der Beziehung

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \Delta = \frac{l}{\lambda_0} (n_p - n_s) \quad (14)$$

durch Differentiation der Lorentz-Lorenzschen Gleichung

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{M}{d} = \frac{4\pi}{3} \cdot L \cdot b = R \quad \text{bzw.} \quad \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} \cdot N \cdot b. \quad (15)$$

Hierin bedeuten n = Brechungsindex, M = Molekulargewicht, d = Dichte, L = Loschmidtsche Zahl, N = Anzahl der Moleküle im cm^3 , b = Polarisierbarkeit, R = Molekularrefraktion; n_p ist der Brechungsindex für Licht, dessen elektrischer Vektor parallel zur Rotationsachse schwingt und n_s der für die hierzu senkrechte Schwingungsrichtung; l ist der Lichtweg in dem rotierenden Medium und $\Delta = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$ der in Wellenlängen des Vakuums gemessene Gangunterschied zwischen den beiden zueinander senkrechten Komponenten des Lichtes.

Es wird, je nachdem, von welcher Form der Gl. (15) man ausgeht,

$$\Delta = \frac{(n^2 - 1)(n^2 + 2)}{4 n b \cdot \lambda_0} \cdot \Theta_4 \cdot l \cdot \omega^2 = B_r \cdot l \cdot \omega^2 \quad \text{mit} \quad B_r = \frac{(n^2 - 1)(n^2 + 2)}{4 n l \cdot \lambda_0} \cdot \Theta_4 \quad (16a)$$

oder

$$\Delta = \frac{\pi (n^2 + 2)^2}{3 n \cdot \lambda_0} \cdot N \cdot \Theta_4 \cdot l \cdot \omega^2 = B_r \cdot l \cdot \omega^2 \quad \text{mit} \quad B_r = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{(n^2 + 2)^2}{n \cdot \lambda_0} \cdot N \cdot \Theta_4. \quad (16b)$$

Das Medium mit den rotierenden Molekülen verhält sich also wie ein einachsiger Kristall, dessen Achse parallel zur Rotationsachse verläuft. Die die entstehende Doppelbrechung charakterisierende Konstante B_r hängt außer von der absoluten Temperatur von der Differenz der Polarisierbarkeiten des Moleküls und der Differenz der Hauptträgheitsmomente ab.

Vor Weiterführung der Rechnungen und der Überlegungen soll an einem Beispiel, dem Nitrobenzol, die Größe dieses Effektes gezeigt werden. Es wird dabei die den Tatsachen natürlich nicht entsprechende Annahme gemacht, daß auch im flüssigen Zustand die Kräfte zwischen den Molekülen vernachlässigt werden

dürfen. In den nächsten Abschnitten werden wir auf diese Verhältnisse noch näher eingehen. Die hier zunächst errechneten Zahlen sollen nur einen ersten Anhaltspunkt über die Größenordnung der auftretenden Doppelbrechung geben. Stuart und Volckmann errechneten aus der Kerr-Konstanten des Dampfes und dem Depolarisationsgrad⁶⁾ die Polarisierbarkeiten zu

$$b_\xi = 132,5 \cdot 10^{-25}, \quad b_\eta = 77,5 \cdot 10^{-25}, \quad b_z = 177,6 \cdot 10^{-25} \quad \text{und} \quad b = 129,2 \cdot 10^{-25}. \quad (17)$$

Die Hauptträgheitsmomente errechnen sich aus den Atomabständen zu

$$I_\xi = 625 \cdot 10^{-40}, \quad I_\eta = 810 \cdot 10^{-40}, \quad I_z = 185 \cdot 10^{-40}. \quad (18)$$

Mit $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ ergibt sich nach Gl. (12) bei 20°C für $\Theta_4 = -5,01 \cdot 10^{-49}$. Bei $n = 1,56$ ergibt sich für $B_r = -0,72 \cdot 10^{-21}$. Setzt man die mit Hilfe von

⁶⁾ Stuart, Volckmann, Z. physik. Chem. (B) 17, 429 (1932).

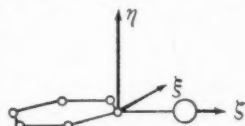


Abb. 1. Hauptachsen des Nitrobenzolmoleküls

Ultrazentrifugen höchstens noch erreichbaren Frequenzen mit $\omega = 10^4$ an, so ergibt sich bei einem Lichtweg von 5 cm ein relativer Gangunterschied von $\Delta = -3,6 \cdot 10^{-13}$. Dieser Effekt dürfte quantitativ kaum meßbar sein.

2. Berechnung der Rotationsdoppelbrechung von Dipolsubstanzen im elektrischen Drehfeld

Bei Anlegen elektrischer Drehfelder wird ebenfalls eine Rotation, besonders bei Dipolmolekülen, zu erwarten sein. Bekanntlich läßt sich der elektrooptische Kerr-Effekt (vom Voigt-Effekt sei hier wegen seiner Kleinheit abgesehen) durch die von Langevin angesetzte und vor allem von Born weitergeführte Orientierungstheorie erklären. Nimmt man zunächst an, daß diese Einstellung der Moleküle im elektrischen Feld momentan erfolgt, auf die Relaxationserscheinungen soll später eingegangen werden, so dreht sich ein Teil der Dipolmoleküle mit dem äußeren Drehfeld in Phase. Wir wollen nun die Doppelbrechung jeweils in dem Augenblick messen, wenn die Richtung des elektrischen Feldes mit den Richtungen der gekreuzten Polarisatoren und Analysatoren Winkel von 45° bildet. Der beobachtete Gangunterschied wird sich dann aus demjenigen, der durch das elektrische Feld allein hervorgerufen wird, und dem Kreiseffekt zusammensetzen.

Die Rechnungen werden hier etwas komplizierter, da gleichzeitig zwei orientierende Momente auf das einzelne Molekül einwirken, die sich auch noch gegenseitig beeinflussen. Wir nehmen daher folgende Vereinfachungen vor, zu denen uns die Kleinheit der Effekte berechtigt: Wir behandeln die einzelnen Effekte additiv; Glieder höherer Ordnung und gemischte Glieder werden zunächst vernachlässigt; der Einfluß des Kreiseffektes auf die Dipolachse selbst bleibt ebenfalls unberücksichtigt. Da die kinetische Energie der erzwungenen Drehbewegung nur von der Lage des Moleküls zur Rotationsachse abhängt, kann man bei der oben angedeuteten Beobachtungsmethode so rechnen, als befände sich das Ganze in Ruhe und das Molekül besäße außer der potentiellen Energie des Dipols im elektrischen Feld noch die „quasipotentielle Energie“ H_4 . Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Molekülen selbst sollen ebenfalls vernachlässigt werden. Rotationsachse ist weiterhin die x -Achse.

Zunächst soll der Rotationsanteil ermittelt werden. Zur Vereinfachung nehmen wir den bei vielen Molekülen vorkommenden Fall an, daß die Dipolachse mit einer der Hauptachsen zusammenfällt, und zwar der ζ -Achse. Diese zeigt in dem Augenblick der Messung in Richtung der z -Achse; es ist also nur noch ein Freiheitsgrad der Drehung um diese Achse vorhanden. Mit $\psi = \Theta = 0$ ergibt sich aus den Ansätzen der Gl. (10) und Gl. (11) nach längerer Rechnung

$$\bar{b}_x = b + \frac{\omega^2}{16 k \theta} (b_\xi - b_\eta) (I_\xi - I_\eta) \quad \text{und} \quad \bar{b}_y = b - \frac{\omega^2}{16 k \theta} (b_\xi - b_\eta) (I_\xi - I_\eta). \quad (19)$$

Hiervon benötigen wir im Zusammenhang mit der Beobachtung des Kerr-Effektes nur \bar{b}_y , denn die Beobachtung muß ja in Richtung der Rotationsachse erfolgen.

Hierzu kommen nun noch die Polarisierbarkeiten in einem elektrischen Feld. Diese sind bekanntlich unter Berücksichtigung des Dipolgliedes allein

$$\bar{b}_y = b - \Theta_2 \cdot \frac{Z_0^2}{2} \quad \text{und} \quad \bar{b}_z = b + 2 \Theta_2 \cdot \frac{Z_0^2}{2}, \quad (20)$$

wobei

$$\Theta_2 = \frac{1}{45 k^2 \theta^2} ((\mu_\xi^2 - \mu_\eta^2) (b_\xi - b_\eta) + (\mu_\eta^2 - \mu_\zeta^2) (b_\eta - b_\zeta) + (\mu_\zeta^2 - \mu_\xi^2) (b_\zeta - b_\xi)) \quad (21)$$

und Z_0 die tatsächlich am Molekül angreifende innere Feldstärke ist, die mit der außen angelegten Feldstärke Z bei Gasen, d. h. ohne Feldverzerrung durch die unmittelbar angrenzenden Moleküle, in der folgenden Beziehung steht:

$$(\varepsilon = \text{Dielektrizitätskonstante}) \quad Z_0 = \frac{\varepsilon + 2}{3} \cdot Z. \quad (22)$$

Mit diesen Ergebnissen Gl. (20) und Gl. (19) erhalten wir für die mittleren Polarisierbarkeiten eines einzelnen rotierenden Moleküls in dem besagten Augenblick der Messung

$$\bar{b}_y = b - \Theta_2 \cdot \frac{Z_0^2}{2} - \frac{\omega^2}{16 k \vartheta} (b_\xi - b_\eta) (I_\xi - I_\eta) \quad \text{und} \quad \bar{b}_z = b + 2 \Theta_2 \cdot \frac{Z_0^2}{2}. \quad (23)$$

Wollen wir hieraus die Gangunterschiede mit Hilfe der Gl. (15) berechnen, so ist noch zu beachten, daß nicht alle Moleküle an der Rotation teilnehmen, da bei den üblichen elektrischen Feldstärken noch längst keine Sättigung erreicht ist. Einen Anhaltspunkt über die Anzahl der Moleküle, die den Rotationseffekt zeigen werden, kann man aus der Theorie der Dielektrizitätskonstanten gewinnen⁷⁾. Dort gilt bekanntlich für das mittlere Moment eines Dipols

$$\bar{m}_z = \frac{\mu^2}{3 k \vartheta} \cdot Z_0. \quad (24)$$

Daraus folgt die Molekularpolarisation zu $\frac{4\pi}{3} \cdot N \cdot \frac{\mu \cdot Z_0}{3 k \vartheta} \cdot \mu$. Man kann dies auffassen, als tragen alle Moleküle nur mit einem Moment $\frac{\mu \cdot Z_0}{3 k \vartheta} \cdot \mu$ hierzu bei, oder als würden nur $\frac{\mu \cdot Z_0}{3 k \vartheta} \cdot N$ Moleküle mit ihrem ganzen Moment zur Polarisation beitragen, d. h. parallel zum äußeren Feld gerichtet sein. In jedem Fall ist $\frac{\mu \cdot Z_0}{3 k \vartheta}$ ein Maß für die Stärke der Orientierung von Dipolmolekülen in einem elektrischen Feld. Wir schließen uns der letzten Interpretation an und ersetzen bei den Berechnungen des Rotationsanteils an der Doppelbrechung N durch $N \cdot \frac{\mu \cdot Z_0}{3 k \vartheta}$. Damit haben wir die eingangs gemachte Annahme vollkommener Parallelität aller ξ -Achsen wieder ausgeglichen. So erhält man schließlich die gesuchte Phasendifferenz mit

$$\frac{n_p - n_s}{n} = \frac{2\pi}{9} \cdot \frac{(n^2 + 2)^2}{n^2} \left\{ \frac{3N}{2} \cdot \Theta_2 \cdot Z_0^2 + \frac{N \cdot \mu \cdot Z_0}{48 k^2 \vartheta^2} \cdot \omega^2 (I_\xi - I_\eta) (b_\xi - b_\eta) \right\}. \quad (25)$$

bzw.

$$A = \frac{\pi (n^2 + 2)^2}{27 n \cdot \lambda_0} \cdot \frac{N \cdot l}{k^2 \vartheta^2} \left\{ \frac{\mu^2 \cdot Z_0^2}{5} (2 b_\xi - b_\eta - b_\eta) + \frac{\mu \cdot Z_0}{8} \omega^2 (I_\xi - I_\eta) (b_\xi - b_\eta) \right\}. \quad (26)$$

Diese Gleichung liefert bei den unter normalen Bedingungen noch herstellbaren Frequenzen für den Rotationsanteil noch einen ziemlich geringen Wert bei Gasen. Quantitative Berechnungen bei Flüssigkeiten sind aus Unkenntnis der Größe und Festigkeit der Assoziation nicht durchführbar. Andererseits wird diese hier bei den gekoppelten Effekten eine noch größere Rolle spielen als beim normalen

⁷⁾ Debye, Polare Molekeln, Leipzig 1929.

Kerr-Effekt. Man kann aber aus den bisherigen Rechnungen die Abhängigkeit der zu erwartenden Doppelbrechung von den einzelnen Parametern entnehmen; daran wird sich nach den Erfahrungen mit anderen, ähnlichen Problemen nichts ändern. Somit wollen wir zur weiteren Diskussion und experimentellen Nachprüfung unsere bisherigen Ergebnisse zu folgenden Gleichungen zusammenfassen:

$$\Delta = \frac{a}{\theta^2} (b \cdot \mu^2 \cdot Z^2 + c \cdot \mu \cdot Z \cdot \omega^2) \cdot l. \quad (27)$$

Hier sind a , b , c Konstante; b enthält die optische Anisotropie und c neben der Differenz der Polarisierbarkeiten noch die Differenz der Hauptträgheitsmomente; l ist die Länge des Lichtweges im Drehfeld und elektrischen Feld. Für eine feste Temperatur kann man Gl. (27) auch zusammenfassen in der Form

$$\Delta = B \cdot l \cdot Z^2 + R \cdot \mu \cdot Z \cdot l \cdot \omega^2. \quad (28)$$

Dabei ist B die normale Kerr-Konstante, und das erste Glied gibt den elektrooptischen Kerr-Effekt wieder; R ist eine Konstante, die nur von der optischen Anisotropie und der Differenz der Hauptträgheitsmomente der rotierenden Teilchen abhängt.

3. Rotationsdoppelbrechung von Dipolsubstanzen im einfachen Wechselfeld bei Anwendung eines konstanten Magnetfeldes

Man kann annehmen, daß auch bereits im einfachen Wechselfeld die Dipolmoleküle um die Achse mit dem größten Trägheitsmoment rotieren; der Kreiseffekt macht sich hier nur nicht bemerkbar, da diese Rotationsachsen noch einer Gleichverteilung bezüglich der Normalen zu den Platten des Kerr-Kondensators unterliegen. Richtet man aber diese Achsen noch durch ein weiteres Feld aus, so muß sich auch im einfachen Wechselfeld der Rotations-effekt bemerkbar machen. Dazu kann man ein magnetisches Feld benutzen, dessen Feldrichtung

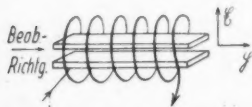


Abb. 2. Kerr-Effekt im longitudinalen Magnetfeld

parallel zur Beobachtungsrichtung verläuft, wenn die Schwerpunkte von positiver und negativer Ladung des Dipolmoleküls vom Schwerpunkt des Moleküls, der doch der Drehpunkt ist, nicht denselben Abstand haben; dann wirken nämlich die rotierenden Dipole wie kleine Elementarmagnete, werden durch das Magnetfeld parallel gerichtet und ein Effekt in derselben Richtung wie beim elektrischen Drehfeld wird sich bemerkbar machen. Auf eine quantitative Durchrechnung soll hier jedoch verzichtet werden, da hierzu neue Annahmen über die Lage des Rotationsmittelpunktes zu den einzelnen Ladungen gemacht werden müßten, die nicht unmittelbar nachprüfbar sind.

Zu beachten ist bei diesen Messungen, daß hier die Faraday-Drehung auch eine Änderung der Doppelbrechung hervorruft; deren Einfluß kann aber nach der Gouy-Wienerschen Regel berechnet werden, deren Gültigkeit Ilberg⁸⁾ experimentell nachgeprüft hat.

⁸⁾ Ilberg, Physik. Z. 26, 908 (1925).

4. Übergang vom gasförmigen zum flüssigen Zustand

Da bei den bisherigen Rechnungen alle Wechselwirkungen zwischen den Molekülen vernachlässigt wurden, treten bei Anwendung der Ergebnisse auf den flüssigen Zustand Abweichungen auf. Ähnliche Probleme liegen bei der Theorie der Dielektrizitätskonstanten und der Kerr-Konstanten vor. Quantitativ sind diese Abweichungen jedoch noch nicht erfaßbar. Auf die einzelnen Ansätze zur Behebung dieser Differenzen soll hier nicht eingegangen werden. Auf jeden Fall wird man aber mit zunehmender Dichte eine Art Nahorientierung und Komplexbildung annehmen dürfen, über deren Größe vorläufig noch jede faßbare Vorstellung fehlt. Man wird nicht mit dem Einzelmolekül als rotierendes Teilchen rechnen dürfen, sondern wird Molekülgruppen annehmen müssen. Da die Größe der Trägheitsmomente mit der 5. Potenz des Radius der Einzelteilchen wächst, wird eine rasche Vergrößerung des Kreiseffektes eintreten, die zu leicht meßbaren Werten führen kann.

Insgesamt wird man auf eine Rückführung der Ergebnisse auf Moleküldaten noch verzichten müssen, doch werden wir auf eine Möglichkeit einer Kontrolle der Gl. (28) durch die Messungen hoffen dürfen.

5. Bemerkungen über einige andere Effekte

Vor der Besprechung des experimentellen Teiles müssen wir noch einige Vernachlässigungen rechtfertigen, die bisher übergangen wurden. Zunächst muß nachgeprüft werden, ob nicht durch die hohen Frequenzen infolge der Trägheit allgemein eine Veränderung der Doppelbrechung eintreten kann. Rechnungen von Rocard⁹⁾ für hochfrequente elektrische Wechselfelder ergaben aber hierfür ein Korrekturglied, das bei den folgenden Messungen ganz vernachlässigt werden kann.

Weiterhin wird durch die Zähigkeit bei höheren Frequenzen eine Phasenverschiebung zwischen der elektrischen Feldstärke und der Doppelbrechung verursacht. Rechnungen von Peterlin, Stuart¹⁰⁾ und Messungen von Gutton und vor allem von Hanle, Maercks^{11) 12)} ergaben aber für Flüssigkeiten mit normaler Zähigkeit, wie sie in den folgenden Messungen verwendet wurden, Relaxationszeiten, die kleiner als 10^{-9} sec waren. Bei Frequenzen bis zu $2 \cdot 10^6$ Hz ist dieser Einfluß also ebenfalls vernachlässigbar.

Zu beachten ist bei allen Messungen mit Hochfrequenz, daß nicht durch Erwärmung in den Gläsern Spannungen auftreten, die zu zusätzlichen Doppelbrechungen führen. Weiterhin machen sich ungleichmäßige Erwärmungen im Feld durch die dielektrischen Verluste durch Schlierenbildung störend bemerkbar. Diese Einflüsse können durch kurzzeitige Beobachtungen weitgehend unschädlich gemacht werden.

II. Experimenteller Teil

1. Meßmethode

Die Realisierung der oben angedeuteten Meßmethode erfolgte in Abänderung einer bereits von Ilberg benutzten Anordnung zur Absolutmessung von Kerr-

⁹⁾ Rocard, J. Physique Radium 4, 247 (1933).

¹⁰⁾ Peterlin, Stuart, Hand- und Jahrbuch der chem. Physik, 8/Ib.

¹¹⁾ Gutton, C. R. Acad. Sci. Paris 156, 387 (1913).

¹²⁾ Maercks, Hanle, Z. Physik 114, 408 (1939).

Konstanten in Wechselfeldern¹³⁾. In den Strahlengang wurde ein Lichtrelais, bestehend aus einer weiteren Kerr-Zelle zwischen zwei gekreuzten Nicols, geschaltet das nur dann Licht durchließ, wenn die Feldstärke in der eigentlichen Meßzelle ihr Maximum erreicht hatte. Da mit den zur Verfügung stehenden Röhren keine genügend hohen, rechteckigen Impulse zur Steuerung des Lichtgebers erzeugt werden konnten, wurden die Lichtgeberzelle und die Meßzelle einfach parallel geschaltet, wobei die Platten beider Zellen parallel zueinander eingestellt wurden. Bekanntlich ist die durch eine Anordnung von der Art des Lichtgebers gehende Lichtmenge

$$L = L_0 \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad (29)$$

wobei $\varphi = 2\pi \cdot \Delta$ die Phasendifferenz der beiden senkrecht zueinander polarisierten, in den Hauptschwingungsrichtungen liegenden Komponenten des Lichtstrahles bedeutet; L_0 ist die aus dem Polarisator austretende Lichtmenge. Weiterhin ist

$$\Delta = B \cdot l \cdot Z^2 \quad (30)$$

und

$$Z = Z_m \cdot \sin \omega t; \quad (31)$$

dabei ist Z_m der Maximalwert der elektrischen Feldstärke und $\omega = 2\pi \cdot f$ die Kreisfrequenz des Wechselfeldes. Damit ergibt sich für die durchgelassene Licht-

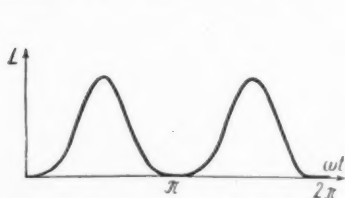


Abb. 3a. Zeitlicher Verlauf der Lichtintensität des Lichtgebers

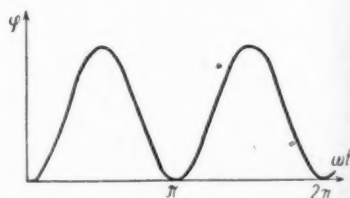


Abb. 3b. Zeitlicher Verlauf der Doppelbrechung der Meßzelle bei sinusförmiger Wechselspannung

menge der in Abb. 3a dargestellte zeitliche Verlauf, während die Doppelbrechung den in Abb. 3b wiedergegebenen Verlauf zeigt. (Diese Abbildungen sind nur als Beispiele für eine bestimmte Anordnung anzusehen; je nach der maximalen Feldstärke treten hiervon noch geringe Abweichungen auf.) Die aus der ganzen Anordnung resultierende Doppelbrechung erscheint also mit verschiedener Lichtstärke. Wie man ohne weiteres sieht, liegt der Schwerpunkt der beobachtbaren Doppelbrechung im Maximum der an der Meßzelle liegenden Spannung; die mit einem Soleil-Babinet-Kompensator durch Einstellen auf Lichtminimum gemessenen Phasendifferenzen werden also den durch die maximale Feldstärke Z_m am Meßplattenpaar verursachten Gangunterschieden entsprechen.

Bei Drehfeldmessungen wurde ein Vierplattenkondensator als Meßzelle benutzt; das dann parallel zum Lichtgeber liegende Plattenpaar soll weiterhin als

¹³⁾ Ilberg, Physik. Z. 29, 670 (1928).

Meßplattenpaar bezeichnet werden. Das zweite Plattenpaar ergibt dann, wenn dessen Spannung genau um eine Viertelperiode gegenüber der Meßplattenpaarspannung verschoben ist, keinen mit dem Kompensator meßbaren Gangunterschied. Die experimentelle Nachprüfung dieser Anordnung soll später besprochen werden.

2. Optische Anordnung

Auf Grund der obigen Überlegungen ergab sich folgende Anordnung: Das Licht einer Quecksilberdampfampe (200 Watt) wurde durch eine Linse $L1$ auf das Loch einer Irisblende $B1$ konzentriert; durch eine Wasserküvette und ein Didym-Filter (Zeiß-Monochromatfilter B) wurde der störende Teil des Spektrums ausgeblendet. Alle Messungen wurden so mit der grünen Hg-Linie von $546,1\text{ m}\mu$ ausgeführt. Der rote Teil des Lichtes wurde nur bei manchen Messungen noch durch ein CuCl_2 -Filter beseitigt; arbeitete man nämlich mit dem Soleil-Babinet-Kompensator bei einem Gangunterschied von ± 1 , so erschien ohne CuCl_2 -Filter

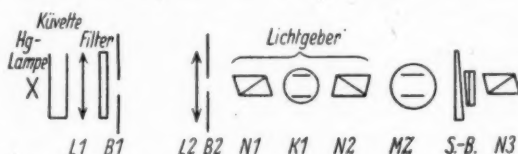


Abb. 4. Optische Anordnung

das Gesichtsfeld infolge der Wellenlängenabhängigkeit der Kompensation bei genauer Einstellung tiefrot und ging bei geringer Verstimmung in ein reines Grün über. Wegen der besonderen Augenempfindlichkeit für diese Kontrastfarben konnte das Rot der Lichtquelle somit zur Empfindlichkeitssteigerung benutzt werden. Die Öffnung der Irisblende wurde durch ein Objektiv $L2$ mit eingebauter Blende $B2$ auf den Kompensator abgebildet (SB). Im Lichtweg zwischen $B2$ und SB befanden sich der Lichtgeber mit den beiden Glan-Thompson-Prismen $N1$ und $N2$ und der dazwischenliegenden Kerr-Zelle $K1$ sowie die Meßzelle MZ (eine Zwei- oder Vierplattenzelle). Der Kompensator wurde durch ein weiteres Polarisationsprisma $N3$ betrachtet, welches leicht drehbar war. Die Justierung erfolgte zunächst für $N2$ und $N3$, danach mit eingeschaltetem SB für $N1$ und $N2$. $N1$ konnte leicht aus dem Lichtweg herausgeschwenkt werden, um die ganze Anordnung kontrollieren zu können (Festlegung des Nullpunktes von SB). Das Meßplattenpaar von MZ und die Platten von $K1$ wurden durch Anvisieren parallel gestellt.

Die Teilung des Soleil-Babinet-Kompensators ergab für eine Gangdifferenz von $\Delta = \pm 1$ bei Hg-Grün 1952 Trommelteile. Ein Trommelteil entsprach also einer Gangdifferenz von

$$\Delta_{1\text{ Tr}} = 0,000512. \quad (32)$$

Im Folgenden werden vielfach nur die Trommelteile angegeben, da meistens nur die Relativwerte von Bedeutung sind. Zu den weiteren Umrechnungen wird dann jeweils die Gl. (32) benutzt. Die Einstellgenauigkeit betrug im Durchschnitt ± 3 Trommelteile.

Die Kerr-Zellen wurden zur Vermeidung unnötiger Erdkapazitäten aus Glas geblasen. Das eigentliche System bestand aus vernickelten Messingschienen von 3 mm Stärke, die durch je drei Stückchen Spiegelglas auf Abstand gehalten wurden. Das Ganze wurde durch vernickelte Messingfedern im Gehäuse festgehalten. Die Glasgefäße besaßen außer den eingeschmolzenen Platin-Durchführungen noch zwei Ansätze mit Normalschliffen, von denen der eine zum Füllen mit einem Hahn versehen war und zum unmittelbaren Anschließen der Zelle an die Vakuumdestillationsapparatur diente. Dadurch war eine Füllung möglich, ohne daß die gereinigte Substanz noch einmal mit der feuchten Außenluft in Berührung kam. Der zweite Schliffansatz diente zur Aufnahme eines Thermoelementes. Die Glasgefäße hatten einen Innendurchmesser von 30 mm. Die Lichtgeberzelle war 39 mm lang und besaß zwei Platten von 29,4 mm Länge und 18,4 mm Breite, die sich in einem Abstand von 4,04 mm befanden. Die Zweiplattenmeßzelle *MZ1* war 69 mm lang und hatte zwei Platten von 59,4 mm Länge und 15,0 mm Breite im Abstand von 2,90 mm. Die Drehfeldzelle war ebenfalls 69 mm lang. Die vier Platten von je 58,2 mm Länge waren ineinander verschachtelt und lagen jeweils an drei Stellen auf. Sie wurden durch Glasplättchen von 1,13 mm Stärke gegeneinander isoliert. Je zwei gegenüberliegende Platten hatten einen Abstand von 7,2 mm und mit Nitrobenzol gefüllt eine Kapazität von etwa 10 pF. Die Zellen wurden durch spannungsfreies Spiegelglas der Firmen B. Halle Nachf., Berlin, und C. Zeiß, Jena, verschlossen, die auf die plan geschliffenen Rohrränder mit Wasserglas aufgekittet waren, das wiederum durch Stanniolstreifen abgeschirmt wurde. Danach war ein wandfreies Arbeiten mit den Zellen ohne Neufüllung über 14 Tage lang möglich.

Die Lichtgeberzelle war bei allen Messungen mit Nitrobenzol gefüllt.

Die Füllung der Zellen mußte sehr sorgfältig gereinigt werden, besonders beim Nitrobenzol ist dies wichtig; da hierüber bereits von anderer Seite verschiedene Untersuchungen vorliegen, soll hier nicht näher darauf eingegangen werden. Durch einfache Destillation, Auswaschen mit Sodälösung und destilliertem Wasser, Trocknung mit Kalzium und Kalziumoxyd, mehrmalige Vakuumdestillation, Trocknung mit Aluminiumoxyd und Silberoxyd und elektrolytische Reinigung konnte der spezifische Widerstand — im Elektrolysiergefäß gemessen — auf etwa $4,5 \text{ bis } 5 \cdot 10^{10} \Omega \text{ cm}$ gebracht werden. Bei Nichtbenutzung wurden die Zellen unter Licht- und Luftabschluß an 220 Volt Gleichspannung gelegt.

3. Elektrische Anordnung

Die Messungen wurden zunächst alle bei 50 Hz zur Nachprüfung durchgeführt. Diese Spannungen wurden über einen Regeltransformator dem Netz entnommen. Bei Drehfeldmessungen wurde die notwendige Phasenverschiebung mit Hilfe eines Kondensators von $0,2 \mu\text{F}$ und eines regelbaren Widerstandes von $21 \text{ k}\Omega$ hergestellt.

Die Hochfrequenzmessungen wurden mit Frequenzen zwischen 700 und 1700 kHz durchgeführt. Die Schaltung des Hochfrequenzgenerators zeigt Abb. 5. Als Gleichstromquelle diente ein regelbarer Hochspannungsgleichrichter, der bis zu 2600 Volt Gleichspannung liefern konnte. Durch Parallelspeisung konnte der Schwingkreis frei von Gleichspannung gehalten werden. Der Schwingkreis aus freitragender Spule und Luftdrehkondensator war für etwa 1700 kHz berechnet; durch Parallelschaltung von Festkondensatoren bis zu 1000 pF konnte der Fre-

quenzbereich bis herab zu 700 kHz erweitert werden. Die Amplitude wurde durch Regelung der Anodenspannung eingestellt. Zur Erzeugung der Phasenverschiebung von 90° wurde hier ein zweiter Kreis (II) benutzt, der ähnlich wie der Schwingkreis des Generators aufgebaut war (I). Die Resonanz der beiden induktiv gekoppelten Kreise wurde durch ein Glimmrohr (Amplitudenrohr der Deutschen Glimmlampengesellschaft, Leipzig) angezeigt und konnte außerdem am Minimum des Voltmeterausschlages von Kreis I erkannt werden. Um die Dämpfungen der beiden Kreise einander anzugleichen, wurde parallel zu einem Teil der Spule des Kreises II veränderlich ein Widerstand von etwa $50\text{ k}\Omega$ geschaltet. Durch die dadurch größer werdende Dämpfung wurde gleichzeitig die hier sehr wichtige phasenrichtige Einstellung des Kreises II erleichtert, denn nur bei genauer Resonanz sind die beiden Spannungen um eine Viertelperiode gegeneinander verschoben.

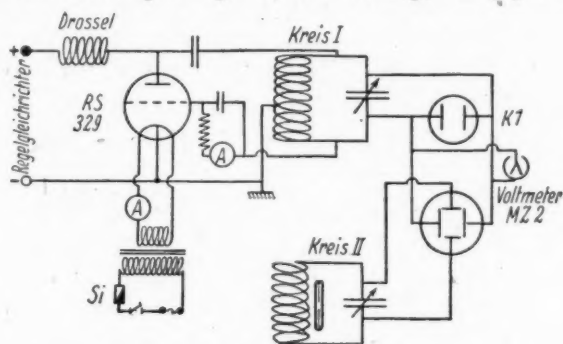


Abb. 5. Schaltung des Hochfrequenzgenerators

Die bei der einen Beobachtungsmethode benutzte Magnetspule bestand aus 2500 Windungen, die in einer Länge von 21 cm auf einen doppelwandigen Zylinder, der von Kühlwasser durchflossen wurde, gewickelt waren. Dadurch war es möglich, die Spule kurzzeitig mit 600 Watt zu belasten, ohne daß im Innern eine störende Erwärmung auftrat. Das Magnetfeld betrug dabei etwa 600 Gauß.

4. Weitere Hilfsmessungen

Die Spannungsmessung an Kreis I erfolgte mit einem elektrostatischen Voltmeter nach Starke-Schröder, das mit 50 Hz unter Benutzung eines Spannungswandlers geeicht wurde, die Spannungen waren auf etwa $\pm 5\%$ genau ablesbar. An Hand dieses Voltmeters wurde ein Braunschkes Elektrometer geeicht, das zu Spannungsmessungen an Kreis II benutzt wurde, um die Amplituden der beiden Spannungen gleich groß zu machen. Der Abgleich erfolgte dabei durch Veränderung der Ankopplung und des Dämpfungswiderstandes in Kreis II. Im allgemeinen wurde dieses Voltmeter nach ungefährem Abgleich des Kreises II wieder abgeschaltet.

Die Frequenzmessung erfolgte mit einem Resonanzwellenmesser der Firma Steeg und Reuter, Bad Homburg, auf etwa $\pm 0,5\%$ genau.

Die Temperatur konnte mit einem Kupfer-Konstantan-Thermoelement auf etwa $0,2^\circ\text{C}$ genau gemessen werden. Da die Korrekturen aber gering sind, solange

man nicht über 40° C geht, wurde nur mit den auf ganze Grade abgerundeten Werten gerechnet.

5. Fehlermöglichkeiten

Zunächst wurde die Richtigkeit der Meßmethode nachgeprüft. Mit Nitrobenzol als Testsubstanz wurde bei 50 Hz und bei 1700 kHz die Abhängigkeit der gemessenen Doppelbrechung von der Scheitelspannung im einfachen Wechselfeld festgestellt. Es ergab sich der aus Gl. (30, 31) folgende quadratische Verlauf, auch der Absolutwert der gemessenen Phasendifferenz stimmte in den Fehlergrenzen mit dem auf Grund von anderen Gleichspannungsmessungen errechneten Wert überein. Daraus folgt zunächst die Richtigkeit der Meßanordnung auch bei den Hochfrequenzmessungen.

Danach wurde die Drehfeldanordnung nachgeprüft. Zunächst wurde bei 50 Hz und konstanter Meßplattenspannung die Spannung am zweiten Plattenpaar variiert, also die Feldform vom Kreis über die Ellipse zum einfachen Wechselfeld geändert. In der dabei feststellbaren Doppelbrechung traten keine Änderungen auf. Das zeigt, daß bei diesen Frequenzen ein Rotationseffekt noch nicht nachweisbar ist; außerdem folgt daraus, daß die Spannung am zweiten Plattenpaar bei genau 90° Phasendifferenz keinen unmittelbaren Einfluß auf das Meßergebnis hat.

Die Nachprüfung im hochfrequenten Drehfeld war noch aus einem anderen Grund wichtig: Ist die Phasenverschiebung nicht genau 90°, dann wird die Doppelbrechung in einem Augenblick gemessen, in dem das resultierende Feld nicht mit den Polarisator- und Analysatorrichtungen Winkel von $\pm 45^\circ$ bildet; ist dieser Winkel um α kleiner, so ist die feststellbare Doppelbrechung nur noch

$$|\Delta| = |\Delta_m| \cdot \cos 2\alpha, \quad (33)$$

wobei Δ_m der Maximalwert der Doppelbrechung ist bei $\alpha = 0$. Doch auch hier ergaben verschiedene Prüfungsmessungen einmal die richtige Anzeige der Resonanz durch die Glimmröhre und das Voltmeter und auch das einwandfreie Arbeiten der Meßmethode bei Hochfrequenz.

Damit muß also jede Änderung in den gemessenen Gangunterschieden auf einer Änderung der Doppelbrechung beruhen.

Eine unmittelbare Nachprüfung der Form des elektrischen Feldes war mit den vorhandenen Mitteln nicht möglich, sie fand nur bei niedrigen Amplituden statt und bestätigte am Oszillographen die obigen Ergebnisse. Eine Überwachung mit Oszillograph bei höheren Spannungen hätte einen Spannungsteiler erfordert, der wiederum eine zu enge Kopplung der beiden Kreise mit sich gebracht hätte. Bei den Messungen selbst konnte die richtige Phasenlage auch aus der sich am Kompensator ergebenden Gangdifferenz ersehen werden; diese mußte bei Resonanz stets ein Maximum haben gemäß der Beziehung der Gl. (33). Auf diese Weise konnte in Zweifelsfällen jederzeit der richtige Meßwert nachgeprüft werden.

Die Einfachheit des Aufbaus erlaubte es, vom Drehfeld unmittelbar ohne weitere Umschaltung zum einfachen Wechselfeld überzugehen. Dazu brauchte man nur den Kondensator des Kreises II zu verstimmen. Da außerdem durch Regelung der Anodenspannung auch die Amplituden von Drehfeld- und Wechselfeldmessung gleichgemacht werden konnten, ließ sich leicht der Einfluß der Rotation sicher feststellen, indem man eine Drehfeldmessung zwischen zwei Wechselfeldmessungen einschachtelte. Dadurch ließ sich auch der Rotationseffekt ohne

weiteres von etwa im Laufe der Messungen durch die stärker werdenden Erwärmungen auftretenden Spannungsdoppelbrechungen in den Deckgläsern trennen.

Unberücksichtigt blieben bei den Spannungsmessungen die Einflüsse der Zuleitungen zum Meßinstrument. Da diese jedoch bei allen Messungen fest blieben, ist diese Vernachlässigung ohne besondere Bedeutung.

6. Meßergebnisse

Mit der beschriebenen Anordnung wurden die folgenden Messungen im Drehfeld durchgeführt, deren Ergebnisse in den Tabellen 1 bis 10 und in den Abbildungen 6 bis 9 wiedergegeben sind. Gemessen wurde mit den Kompensatorstellungen ± 0 und ± 1 . Alle Meßergebnisse wurden nach Gl. (27) auf 20°C umgerechnet. In den Tabellen sind nur die Trommelteile des Soleil-Babinet-Kompensators angegeben in Abhängigkeit vom Effektivwert der Wechselspannung. Da sinusförmige Spannungen benutzt wurden, ergeben sich die Scheitelwerte einfach durch Multiplikation mit $\sqrt{2}$. Mit Hilfe der Gl. (32) und den in Abschnitt 2 angegebenen Abmessungen der Kerr-Zellen lassen sich hieraus die wirklichen Gangunterschiede und die Konstanten der Gl. (28) berechnen. Jeder einzelnen Meßreihe liegen etwa 60 bis 80 Einzelmessungen zugrunde, von denen in den Tabellen jeweils nur die Mittelwerte angegeben sind. Die z. T. größeren Streuungen wurden, vor allem beim Benzylalkohol, durch die Erwärmung der Zelle und die damit verbundene Schlierenbildung hervorgerufen. Alle Substanzen wurden außerdem bei 50 Hz untersucht; dabei zeigte sich kein Einfluß des Drehfeldes auf die Doppelbrechung.

Bei Nitrobenzol erfolgten die Messungen durch Aufnahme kontinuierlicher Meßreihen bei einfachem Wechselfeld und anschließend im Drehfeld; bei den anderen Substanzen wurde jeweils eine Drehfeldmessung von zwei Messungen im Wechselfeld eingeschlossen und daraus die Differenz der einzelnen Gangunterschiede ermittelt. Auf den graphischen Darstellungen bedeutet Δ_K die im einfachen Wechselfeld gemessenen, dem normalen Kerr-Effekt entsprechende Doppelbrechung und Δ_D die im Drehfeld gemessenen Werte. Die in den Abbildungen 7, 8, 9 als Ordinaten aufgetragenen Werte

$$\Delta_R = \Delta_D - \Delta_K \quad (34)$$

entsprechen dem Rotationseffekt.

Bei Schwefelkohlenstoff zeigte sich in Übereinstimmung mit unseren Vorstellungen — Schwefelkohlenstoff hat kein Dipolmoment und wird daher auch keine merkliche Rotation im Drehfeld ausführen — kein Effekt. Aus den Messungen im einzelnen kann man folgendes entnehmen:

1. Nitrobenzol: Dipolmoment $= 3,84 \cdot 10^{-18}$; die Reinigung erfolgte in der beschriebenen Anordnung.

Die Kurven zeigen qualitativ den erwarteten Verlauf; bei einfacher Wechselspannung stimmen sie bei allen Frequenzen im Rahmen der Meßgenauigkeit überein. Die aus den Moleküldaten $((I_\xi - I_\eta)(b_\xi - b_\eta) < 0)$ sich ergebende Verminderung der Doppelbrechung nimmt mit wachsender Feldstärke und Frequenz zu; der Feldstärkeverlauf zeigt im Rahmen der Fehlergrenzen die aus Gl. (28) für den Rotationsanteil sich ergebende Linearität; die Zunahme des Kreiseffektes mit dem Quadrat der Frequenz ist jedoch nicht ganz erfüllt. Berechnet man z. B.

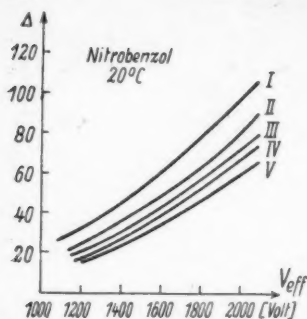


Abb. 6. Nitrobenzol im Drehfeld.

- I: im einfachen Wechselfeld
 II: im Drehfeld bei 740 kHz
 III: im Drehfeld bei 1030 kHz
 IV: im Drehfeld bei 1320 kHz
 V: im Drehfeld bei 1610 kHz

für 1600 Volt_{eff} die durch Gl. (28) definierte Rotationskonstante R , so ergeben sich folgende Werte (die Frequenz in 10^6 Hz ist jeweils als Index beigefügt):

$$R_{0,72} = -1,48 \quad R_{1,32} = -0,51$$

$$R_{1,03} = -0,73 \quad R_{1,06} = -0,51.$$

Der aus den Moleküldaten für ein Einzelmolekül unter Vernachlässigung der Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Teilchen berechnete Wert für R liegt in der Größenordnung von 10^{-5} ; die hier gemessenen großen Werte für R lassen sich unter Annahme der starken Assoziation bei Dipolen erklären, wie bereits im Abschnitt 4 des Kapitels I ausgeführt wurde. Die Abnahme von R bei höheren Frequenzen könnte man durch die dann

Tabelle 1
Nitrobenzol, 740 kHz, 20° C

einfaches Wechself.		Drehfeld	
V_{eff}	Gang- unterschied	V_{eff}	Gang- unterschied
1120	28	1380	38
1200	33	1470	39
1300	41	1540	33
1310	34	1660	41
1600	53	1700	41
1660	70	1800	48
1780	76	1860	57
1930	88	1910	70
1960	88	2000	86
2100	94	2060	80
2260	125	2300	108
2540	170		

Tabelle 3
Nitrobenzol, 1320 kHz, 20° C

einfaches Wechself.		Drehfeld	
V_{eff}	Gang- unterschied	V_{eff}	Gang- unterschied
1000	25	1200	15
1380	47	1320	32
1440	37	1440	26
1480	45	1550	28
1660	68	1600	37
1840	74	1660	60
1910	76	1780	59
1920	93	1960	61
2120	112	1980	69
2160	105	2040	73
2180	106	2080	82
2480	134	2240	108

Tabelle 2
Nitrobenzol, 1030 kHz, 20° C

einfaches Wechself.		Drehfeld	
V_{eff}	Gang- unterschied	V_{eff}	Gang- unterschied
1060	31	1240	19
1120	19	1380	23
1340	39	1440	32
1440	44	1600	39
1520	47	1660	43
1540	54	1700	43
1740	76	1710	61
1860	76	1980	70
1960	93	1040	72
2040	101	2160	84
2160	111	2440	123

Tabelle 4
Nitrobenzol, 1610 kHz, 20° C

einfaches Wechself.		Drehfeld	
V_{eff}	Gang- unterschied	V_{eff}	Gang- unterschied
760	25	930	8
850	17	1000	11
1060	34	1060	20
1300	35	1280	17
1440	60	1340	23
1580	47	1380	22
1600	67	1660	46
1780	73	1700	35
1840	100	2160	79
2210	111	2210	72

auf tretende Zerstörung der Assoziation interpretieren. Doch ist dieser Schluß aus den vorliegenden Messungen allein noch etwas gewagt.

2. Ortho-Nitrotoluol: Dipolmoment = $3,7 \cdot 10^{-18}$; Reinigung durch Trocknung mit Aluminiumoxyd und Vakuumdestillation.

In den Tabellen und graphischen Darstellungen sind hier nur die Differenzen nach Gl. (34) wiedergegeben. Qualitativ ist ein Effekt in derselben Richtung wie beim Nitrobenzol zu erwarten. Das lineare Anwachsen des Effektes mit der Feldstärke ist nicht ganz erfüllt. Für die Rotationskonstante ergeben sich folgende Werte bei 1600 Volt_{eff}:

$$R_{1,08} = -0,47$$

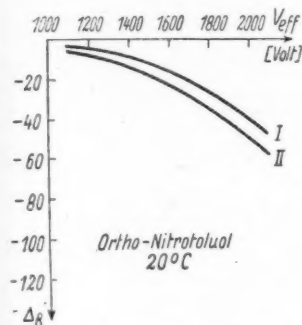


Abb. 7. Ortho-Nitrotoluol im Drehfeld. I: bei 1060 kHz, II: bei 1680 kHz

$$R_{1,06} = -0,76.$$

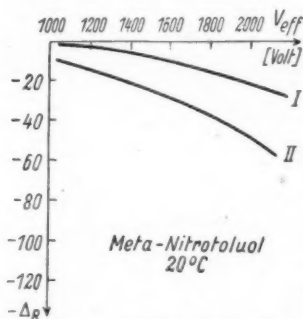


Abb. 8. Meta-Nitrotoluol im Drehfeld. I: bei 1080 kHz, II: bei 1700 kHz

Tabelle 5
Ortho-Nitrotoluol, 1060 kHz, 20°C

V_{eff}	Gangunterschied d. Kreiseffektes
1240	-1
1440	-11
1660	-15
1780	-28
1860	-22
1880	-38
1920	-32
2160	-58

Tabelle 6
Ortho-Nitrotoluol, 1680 kHz, 20°C

V_{eff}	Gangunterschied d. Kreiseffektes
1380	-6
1410	-24
1780	-48
1890	-46
1940	-36
2080	-36
2300	-67
2360	-42

3. Meta-Nitrotoluol: Dipolmoment = $4,2 \cdot 10^{-18}$; die Reinigung erfolgte wie beim Ortho-Nitrotoluol.

Die Tabellenwerte geben Auskunft über den Verlauf im einzelnen. Die Rotationskonstanten bei 1600 Volt_{eff} sind $R_{1,08} = -0,47$, $R_{1,70} = -0,45$. Hier ist also R von der Frequenz weniger abhängig; man könnte diese Erscheinung erwarten, da durch das größere Dipolmoment eine stärkere Assoziation gegeben ist.

Tabelle 7
Meta-Nitrotoluol, 1,08 kHz, 20°C

V_{eff}	Gangunterschied d. Kreiseffektes
1410	-6
1500	-10
1660	-6
1730	-17
1760	-22
1930	-16
2060	-18
2110	-21
2220	-31
2440	-17

Tabelle 8
Meta-Nitrotoluol, 1700 kHz, 20°C

V_{eff}	Gangunterschied d. Kreiseffektes
1380	-21
1440	-26
1500	-34
1520	-33
1610	-41
1790	-39
1810	-32
1890	-37
1910	-36
1930	-45
2020	-47
2110	-32

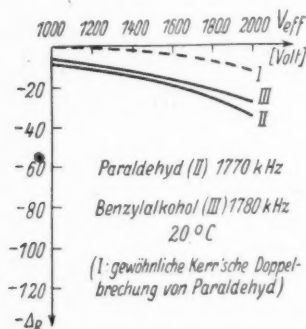


Abb. 9. Substanzen mit negativer Kerr-Konstanten im Drehfeld.

- I: normale elektrooptische Doppelbrechung von Paraldehyd
 II: Paraldehyd im Drehfeld bei 1770 kHz
 III: Benzylalkohol im Drehfeld bei 1780 kHz

Tabelle 9
Paraldehyd, 1770 kHz, 20°C

V_{eff}	Gangunterschied d. Kreiseffektes
1040	-14
1160	-16
1200	-11
1360	-14
1470	-21
1580	-22
1730	-15
1860	-28
1920	-32
1960	-55
2040	-41

Tabelle 10
Benzylalkohol, 1780 kHz, 20°C

V_{eff}	Gangunterschied d. Kreiseffektes
1380	-19
1460	-12
1540	-40
1660	-19
1720	-36
1860	-11
1920	-15
2080	-32

4. Paraldehyd: Dipolmoment = $2,02 \cdot 10^{-18}$; die Reinigung erfolgte durch Ausfrieren.

Diese Substanz ist insofern als Testsubstanz für Theorie und Experiment gut geeignet, als hier die Kerr-Konstante bereits negativ ist (etwa $-2,3 \cdot 10^{-6}$). Da R nach der Theorie wieder negativ ist, muß hier also der Absolutwert der im Drehfeld gemessenen Phasendifferenzen größer sein als die im einfachen Wechselfeld gemessenen Werte. Wie die Tabelle zeigt (in der Abbildung sind zum Vergleich die Werte des normalen Kerr-Effektes gestrichelt eingezeichnet), ergeben die Messungen tatsächlich den erwarteten Verlauf und bestätigen damit endgültig die Realität des Kreiseffektes. Es ist $R_{1,77} = -0,83$ bei 1600 Volt_{eff}.

5. Benzylalkohol: Dipolmoment $= 1,68 \cdot 10^{-18}$; die Reinigung erfolgte durch Vakuumdestillation.

Hier liegen qualitativ dieselben Verhältnisse vor wie beim Paraldehyd. Die Erwartungen werden von den Meßergebnissen bestätigt, wenn hier auch die Unsicherheit der Messungen wegen der starken Erwärmung durch Hochfrequenzverluste wesentlich größer war. Bei 1600 Volt_{eff} war $R_{1,78} = -0,92$.

Im Magnetfeld wurde nur eine Probemessung mit Nitrobenzol bei 1400 kHz und etwa 600 Gauß durchgeführt. Die Ergebnisse sind graphisch in Abbildung 10 wiedergegeben. Die Verdet-Konstante des Nitrobenzols ist so klein, daß die Polarisationssebene des Lichtes nur um etwa 55° gedreht wurde. Drehte man das Polarisationsprima N3 um diesen Winkel nach, so ergaben sich im Magnetfeld bei 50 Hz dieselben Gangunterschiede wie vorher im einfachen Wechselfeld, während im Magnetfeld bei Hochfrequenz die

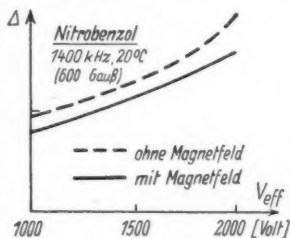


Abb. 10. Nitrobenzol im Magnetfeld

eingezeichnete stärkere Verminderung eintrat. Auch dieser Verlauf bestätigt die aufgestellten Erwartungen, wenn sich auch hieraus qualitativ noch keine exakten Rückschlüsse ziehen lassen.

Zusammenfassung

Ausgehend von der Tatsache, daß ein rotierender Körper stets bestrebt ist, sich um die Achse des maximalen Trägheitsmomentes zu drehen, wurde unter Anwendung der klassischen Boltzmann-Statistik der Einfluß von Drehfeldern auf die Einstellung von Gasmolekülen berechnet. Die sich daraus ergebende Doppelbrechung ist bei den mechanisch herstellbaren Frequenzen zu klein, um gemessen werden zu können. Bei hochfrequenten elektrischen Drehfeldern müßte sich dieser Kreiseffekt in einer Änderung der Kerrschen Doppelbrechung bemerkbar machen. An Hand der Erfahrungen aus der Theorie der Dielektrizitätskonstanten und der Kerr-Konstanten wurden die Ergebnisse auf Flüssigkeiten übertragen und die Abhängigkeit dieser Abweichung von Dipolmoment, elektrischer Feldstärke und Drehfrequenz berechnet.

Weiterhin wurde eine Methode entwickelt und geprüft, welche diesen Effekt zu messen gestattete.

Die Meßergebnisse bestätigen die Richtigkeit der aufgestellten Theorie, bes. auch die vermutete Zunahme des Effektes in der flüssigen Phase. Die Abhängigkeit der Rotationskonstanten R von der Frequenz läßt zwar Vermutungen zu über eine Verkleinerung der Assoziationskomplexe bei höheren Frequenzen, zumal diese Verkleinerung bei größerem Dipolmomenten geringer ist, doch kann aus der relativ geringen Anzahl der bisher untersuchten Substanzen noch kein sicherer Schluß gezogen werden. Eine Abhängigkeit der Rotationskonstanten von der Größe der sich durch Assoziation bildenden Molekülgruppen wird man jedoch als feststehend annehmen dürfen.

Zur weiteren Untersuchung wäre eine Verfeinerung der Meßmethode notwendig, die einmal eine genauere Bestimmung der bereits gemessenen Größen und zum anderen auch ein Ausmessen von Substanzen mit geringerer Doppelbrechung evtl. auch im Gaszustand erlaubt.

In diesem Zusammenhang taucht natürlich die Frage auf, ob Begriffe, die am Einzelmolekül im Gaszustand definiert sind, wie Polarisierbarkeit, Trägheitsmoment usw., auch auf den flüssigen Zustand angewendet werden dürfen, wie dies auch bei den bereits erwähnten Theorien der Dielektrizitätskonstanten und der Kerr-Konstanten getan wurde. Qualitativ führt dies zwar, wie auch die vorliegende Arbeit zeigt, fast immer zu guten Ergebnissen, obwohl diese Einzelgrößen doch nie im flüssigen Zustand unmittelbar zugänglich sind. Ob diese Begriffe aber in quantitativer Hinsicht ausreichen bzw. zweckmäßig sind, um die flüssige Phase vollständig zu beschreiben, mag vorläufig dahingestellt bleiben.

Der experimentelle Teil dieser Arbeit entstand 1948/49 im Physikalischen Institut der Universität Leipzig; ich bin daher dem Direktor dieses Institutes, Herrn Prof. Dr. W. Ulberg für die Bereitstellung von Mitteln und für anregende Diskussionen zu großem Dank verpflichtet. Ferner möchte ich an dieser Stelle nicht versäumen, den Institutsmechanikern, Herrn Hartmann und Herrn Richter für ihre handwerkliche Unterstützung und verständnisvolle Zusammenarbeit zu danken.

Leipzig, Physikalisches Institut der Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 16. September 1949.)

**Über die Streuung und Absorption
des Lumineszenzlichtes in polykristallinen Leuchtstoffschichten
bei Anregung mit energiereichen Quanten-
und Korpuskularstrahlen¹⁾**

Von Immanuel Broser

(Mit 9 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Die von einer angeregten Leuchtstoffschicht ausgestrahlte Lumineszenzlichtintensität hängt ab von dem Absorptionsvermögen des Leuchtstoffes für die erregende Strahlung, von der Absolutausbeute, von je einer für die Absorption und die Streuung des Lumineszenzlichtes in der Schicht verantwortlichen Konstanten und von der Schichtdicke. Differentialgleichungen, die diese Größen mathematisch miteinander verknüpfen, werden aufgestellt und für einfache Fälle der Anregung gelöst. An Hand von Messungen mit Leuchtstoffschichten verschiedener Dicke, die mit Hilfe von α -Teilchen, γ - und Röntgenstrahlen angeregt wurden, wird gezeigt, daß die aufgestellten Gleichungen den wirklichen Verhältnissen mit großer Näherung entsprechen; es gelingt, den Streu- und Absorptionsfaktor für das Lumineszenzlicht für den untersuchten ZnS-Cu-Phosphor zu bestimmen und zu zeigen, daß diese Größen unabhängig von der Art der Anregung sind. Die Untersuchungen liefern Methoden zur genauen Bestimmung der Absolutausbeuten von Leuchtstoffen und zur Ausmessung der Energieverteilungen von energiereichen Korpuskular- und Quantenstrahlen. Abschließend werden Messungen über den Einfluß der Korngröße auf Streu- und Absorptionseigenschaften wiedergegeben und diskutiert.

1. Einleitung

Leuchtstoffe werden im allgemeinen als polykristalline Substanzen hergestellt und finden — in mehr oder minder dicker Schicht auf einer Unterlage aufgetragen — in Form von Leuchtschirmen bei physikalischen Untersuchungen und in der Technik Verwendung. Setzt man einen derartigen Leuchtschirm einer anregenden Strahlung aus, so hängt die Größe der zu beobachtenden, aus der Schicht austretenden Lumineszenzlichtintensität — die sogenannte technische Ausbeute —

¹⁾ Vortrag, gehalten am 29. März 1949 im Colloquium des Kaiser-Wilhelm-Institutes für physikalische Chemie und Elektrochemie.

von folgenden Faktoren ab: Die erzeugte Lichtintensität ist um so größer, je mehr von der erregenden Strahlung absorbiert und in Licht umgewandelt wird, d. h. also je größer das Absorptionsvermögen des Leuchtstoffes für die anregende Strahlung und je besser seine Absolutausbeute ist. Für die technische Ausbeute ist aber außerdem wichtig, welcher Prozentsatz des im Innern der Leuchtstoffschicht erzeugten Lichtes an die Oberfläche gelangen und nach außen emittiert werden kann. Einerseits wird nämlich ein Teil des Lumineszenzlichtes auf seinem Wege im Leuchtstoff absorbiert — also in thermische Energie verwandelt —, und zum anderen kann durch Reflektion und Brechung des Lichtes an den einzelnen Kriställchen eine Richtungsänderung der Lichtstrahlen hervorgerufen werden (Streuung). Als Folge dieser Streuung tritt ein — je nach dem Ort der Erregung im Leuchtstoff mehr oder minder groß — Unterschied der austretenden Lichtintensitäten an der Vorder- und Rückseite des Leuchtschirmes auf.

Will man eine der genannten Eigenschaften der Leuchtschirme aus Messungen der technischen Ausbeute ermitteln, so müssen im allgemeinsten Fall die übrigen Größen und ihre Abhängigkeit von der Schichtdicke des Leuchtstoffes bekannt sein. Zur Bestimmung der absoluten Lichtausbeute muß man beispielsweise sowohl den absorbierten Anteil der erregenden Strahlung, als auch die insgesamt erzeugte Lumineszenzlichtintensität kennen, die man aber aus der beobachteten, aus einer Seite des Leuchtstoffes austretenden Lichtintensität nur bei Kenntnis der Streu- und Absorptionseigenschaften des Leuchtschirmes ermitteln kann.

In der letzten Zeit wurden von L. Herforth, H. Kallmann, U. Martius und vom Verfasser Untersuchungen durchgeführt, um die physikalischen Eigenschaften einer Reihe von Leuchtstoffen bei Anregung mit energiereichen Korpuskular- und Quantenstrahlen zu studieren^{2) 3) 4)}. Zu diesem Zweck wurde von jedem Leuchtstoff eine große Zahl von Schirmen verschiedener Schichtdicken hergestellt und die Abhängigkeit der aus einer Seite austretenden Lichtintensität von der Schichtdicke gemessen. Es ergaben sich dann für die verschiedenen Anregungsarten verschiedene Kurven, je nachdem ob die erregende Strahlung bereits bei geringen Leuchtschirmdicken (α -, Röntgenstrahlen) oder erst bei großer Massenbelegung (β -, γ -Strahlen) merklich absorbiert wurde^{2) 3)}. Jedoch war der Kurvenverlauf bei gleicher Anregungsart von Leuchtstoff zu Leuchtstoff ebenfalls unterschiedlich, da die Absorptions- und Streueigenschaften der verschiedenen Substanzen für ihr Lumineszenzlicht nicht die gleichen waren. Während eine quantitative Deutung der Streu- und Absorptionseigenschaften nicht gegeben werden konnte, gelang es, die Werte der Absolutausbeute zu bestimmen⁴⁾. Bei geringen Schichtdicken sind nämlich Streuung und Absorption der Leuchtstoffschirme zu vernachlässigen, so daß das erzeugte Licht fast unbehindert emittiert werden kann. Die Schwierigkeit liegt dann aber darin, die in diesen dünnen Schichten absorbierte Energie der erregenden Strahlung zu bestimmen. Dies ist bei α - und γ -Strahlenanregung relativ einfach, verursacht aber bei Anregung mit β - und Röntgenstrahlen eine ziemlich große Meßungenauigkeit.

²⁾ I. Broser u. K. Hallmann, Z. Naturforsch. **2a**, 440, 642 (1947).

³⁾ I. Broser, L. Herforth, H. Kallmann u. U. Martius, Z. Naturforsch. **3a**, 6 (1948).

⁴⁾ I. Broser, H. Kallmann u. U. Martius, Z. Naturforsch. **4a**, 204 (1949).

Besser lassen sich diese Untersuchungen durchführen, wenn es gelingt, den gemessenen Kurvenverlauf — austretende Intensität = f (Schichtdicke) — theoretisch zu deuten, d. h. die Verknüpfung der oben erwähnten Leuchtschirmeigenschaften mit der Schichtdicke quantitativ durchzuführen. In diesem Falle läßt sich die insgesamt erzeugte Lichtintensität bei jeder beliebigen Schichtdicke berechnen, und die Messung der absorbierten, anregenden Strahlungsenergie ist bei größeren Dicken sehr viel leichter möglich. Darüber hinaus vermitteln derartige Überlegungen einen Einblick in den Mechanismus von Streuung und Absorption in den polykristallinen Leuchtstoffschichten und ermöglichen es, diese beiden optischen Eigenschaften getrennt zu bestimmen. Durch Angabe des Absorptionsvermögens für die anregende Strahlung, der Absolutausbeute und des Streu- und Absorptionsfaktors für das Lumineszenzlicht ist eine Leuchtstoffschicht dann so charakterisiert, daß sich die technische Lichtausbeute für jede Schichtdicke berechnen läßt.

Im folgenden werden Gleichungen, die das optische Verhalten eines erregten Leuchtschirmes wiedergeben, aufgestellt, und es wird gezeigt, daß sie den wirklichen Verhältnissen bei dem untersuchten ZnS-Cu-Leuchtstoff für den Fall der Anregung mit α -Teilchen, γ - und Röntgenstrahlen mit sehr guter Näherung entsprechen.

2. Die Differentialgleichungen des erregten Leuchtstoffes

Meist besitzt ein Leuchtschirm eine Dicke, die sehr klein ist gegen die Länge und Breite der Oberfläche. In diesem Fall läßt sich das optische Verhalten einer erregten Leuchtstoffschicht als eindimensionales Problem behandeln, da man voraussetzen kann, daß ein Lichtverlust durch Seitwärtsstrahlung an einer Stelle durch einen entsprechenden Betrag von Lichtenergie aus den benachbarten Teilen der Schicht wieder ersetzt wird. Zur Vereinfachung der Rechnung werde angenommen, daß die Leuchtstoffschicht homogen sei und sich in beliebig dünne Einzelschichten zerlegt denken läßt, — eine Voraussetzung, die um so besser erfüllt ist, je feinkörniger der Leuchtstoff ist.

Definieren wir zunächst die optischen Eigenschaften einer Leuchtstoffschicht der Dicke x (gemessen in mg/cm^2), die von außen mit Licht einer bestimmten Wellenlänge bestrahlt wird: Ist die Intensität der auffallenden Strahlung I_0 , so wird ein Betrag $A(x) \cdot I_0$ in der Schicht absorbiert, ein Anteil $R(x) \cdot I_0$ an der Schicht reflektiert, während der Bruchteil $T(x) \cdot I_0$ durch die Schicht hindurchgelangt. Es ist

$A(x)$ der totale Absorptionsfaktor

$R(x)$ der totale Reflexionsfaktor

und $T(x)$ der totale Transparenzfaktor

der Schicht x .

Zwischen diesen Eigenschaften der Schicht besteht die Beziehung:

$$A(x) + R(x) + T(x) = 1, \quad (1)$$

so daß bei Kenntnis zweier Größen die dritte festgelegt ist.

Gehen wir zu immer kleineren Schichtdicken über, so werden die Werte schließlich proportional zur Schichtdicke $x \rightarrow dx$, und es geht über

$$A(x) \rightarrow a \cdot dx$$

$$R(x) \rightarrow r \cdot dx$$

und

$$T(x) \rightarrow t \cdot dx.$$

Wir erhalten somit die optischen Konstanten:

Differentieller Absorptionsfaktor a

Differentieller Reflexionsfaktor (Strefaktor) r

Differentieller Transparenzfaktor t .

Entsprechend Gl. (1) gilt:

$$a \, dx + r \, dx + t \, dx = 1. \quad (2)$$

Wir führen noch eine dritte — weiter unten viel verwendete — abgeleitete Konstante ein und bezeichnen sie als den differentiellen Verlustfaktor v , wobei $v \cdot dx$

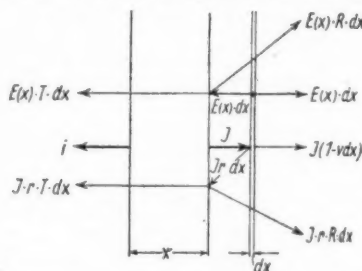


Abb. 1. Schematische Darstellung des Lichtflusses in einer angeregten Leuchtstoffschicht zur Ableitung der Differentialgleichungen

der Bruchteil der auf die Schicht der Dicke dx auffallenden Strahlung ist, der durch Reflexion und durch Absorption verloren geht, so daß also gilt:

$$v = a + r. \quad (3)$$

Man erkennt, daß zwei dieser Konstanten genügen, um das optische Verhalten einer differentiellen Leuchtstoffschicht festzulegen, so daß bei den Rechnungen zur Beschreibung des Verhaltens einer ganzen Schicht solche Konstanten ausgewählt werden können, die die mathematisch einfachsten Gleichungen ergeben.

Nunmehr werde eine Leuchtstoffschicht der Dicke x betrachtet, die durch eine durchdringende Strahlung erregt ist. Die nach rechts austretende Lumineszenzintensität sei mit I , die nach links gehende mit i bezeichnet (Abb. 1). Vergrößert man die Schichtdicke durch Hinzufügen einer Schicht der Dicke dx , so ändern sich sowohl I als auch i um einen gewissen Betrag. Die auf die Schicht dx auftreffende Intensität I wird — entsprechend den oben durchgeführten Überlegungen — nur zu einem Teil durchgelassen, während ein anderer Anteil in der Schicht absorbiert und der Rest an der Schicht reflektiert wird. Ist der reflektierte Bruchteil $r \cdot I \cdot dx$,

der absorbierte Anteil $(v-r) \cdot I \cdot dx$, so gelangt direkt nur die Intensität $I(1-vdx)$ durch die differentielle Schicht hindurch. Der reflektierte Betrag $r \cdot I \cdot dx$ wird seinerseits teilweise an der Schicht der Dicke x reflektiert werden, teilweise aber auch durch die Schicht hindurchgelangen und einen Beitrag zu i liefern. Vernachlässigt man Größen, die in dx klein von höherer Ordnung sind, so folgt für die Änderung des Lichtflusses I bzw. i bei Änderung der Schichtdicke um dx , nach Abb. 1, unmittelbar:

$$\frac{dI}{dx} = I [r R(x) - v] \quad (4)$$

und

$$\frac{di}{dx} = I \cdot r \cdot T(x). \quad (5)$$

Nun spielt aber noch ein zweiter Effekt eine Rolle: In der Schicht dx wird eine gewisse Intensität der anregenden Strahlung absorbiert und in Licht umgewandelt, wodurch eine Vergrößerung von I und i erzielt wird. Ist η die Absolutausbeute des Leuchtstoffes für die betreffende Strahlung, $S(x) \cdot dx$ der in dx absorbierte Strahlungsanteil, so gilt für die erzeugte Lumineszenzlichtintensität:

$$2 \cdot E(x) \cdot dx = \eta S(x) \cdot dx. \quad (5)$$

Davon geht — wie ohne jede nähere Erklärung plausibel sein dürfte — ein Anteil $E(x)dx$ nach rechts und addiert sich zu der Intensität $I + dI$, während der andere Anteil von der Schicht x teilweise reflektiert, teilweise durchgelassen wird. Entsprechend den obigen Überlegungen tritt dann rechts der Betrag $E(x) \cdot [1 + R(x)] \cdot dx$, nach links der Betrag $E(x) \cdot T(x) \cdot dx$ zusätzlich aus. Berücksichtigt man dies in den Gleichungen (4) und (5), so ergeben sich als Endgleichungen:

$$\frac{dI}{dx} = E(x) [1 + R(x)] - I [v - r R(x)] \quad (7)$$

$$\frac{di}{dx} = E(x) \cdot T(x) + I \cdot r \cdot T(x). \quad (8)$$

Dieses Gleichungssystem stellt den allgemeinen Ausdruck für das optische Verhalten einer erregten Leuchtstoffschicht dar und enthält, wie oben gefordert, die vier Grundgrößen: Ausbeute η , Absorption der erregenden Strahlung $S(x)$, Streufaktor r und Absorptionsfaktor für das Lumineszenzlicht $a = v - r$ verknüpft mit der Schichtdicke x des Schirmes; die Größen $R(x)$ und $T(x)$ hängen dabei offensichtlich lediglich von v und r ab. Um die Abhängigkeit der beiden Größen von x zu bestimmen, bedarf es jedoch keiner weiteren Annahme; sie ist im Gleichungssystem (4) (5), bzw. (7) (8) bereits enthalten.

Um dies zu zeigen, denken wir uns den Leuchtschirm von außen links (s. Abb. 1) mit diffusum Lumineszenzlicht der Intensität I_0 bestrahlt. Es gelten dann die einfachen Gleichungen (4) und (5) mit der Bedingung, daß $I = I_0 \cdot T(x)$ und $i = I_0 \cdot R(x)$ bedeutet. Führt man dies ein, so ergibt sich aus (4) und (5):

$$\frac{dT}{dx} = -T(v - rR) \quad (9)$$

und

$$\frac{dR}{dx} = r \cdot T^2. \quad (10)$$

Differenziert man Gl. (10) und setzt Gl. (9) ein, so folgt:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} = 2rT \cdot \frac{dT}{dx} = -2(v-rR) \cdot \frac{dR}{dx}. \quad (11)$$

Integriert man wieder, so entsteht eine Differentialgleichung für R , wenn man bedenkt, daß laut Definition für $x = 0$, $R = 0$ und $T = 1$, also nach Gl. (10) $\left(\frac{dR}{dx}\right)_{x=0} = r$ ist:

$$\frac{dR}{dx} = b \left(1 - 2 \frac{v}{r} R + R^2\right) \quad (12)$$

mit der Lösung:

$$R = \frac{\frac{r}{p} \sin px}{\cos px + \frac{v}{p} \sin px} \quad (13)$$

und nach Gl. (10) sodann:

$$T = \frac{1}{\cos px + \frac{v}{p} \sin px}, \quad (14)$$

wobei

$$p = \sqrt{v^2 - r^2} \quad (15)$$

gesetzt ist.

Wie behauptet, lassen sich die Größen R und T aus den Gleichungen (7) (8), bzw. (4) (5) derart ableiten, daß nur die Konstanten v und r in ihnen enthalten sind. Diese Ausdrücke sind im übrigen bereits seit langem bekannt und auf die verschiedensten physikalischen Probleme angewendet worden. Die neuesten hier bekannten Arbeiten, in denen auch das Problem der Streuung und Absorption in Leuchtstoffen behandelt wird, sind von H. C. Hamaker⁵⁾ und von J. W. Coltman, E. G. Ebbighausen und W. Altar⁶⁾ publiziert worden.

Die Gleichungen (13) und (14) liefern direkt die Methode zur Bestimmung der beiden optischen Konstanten v und r . Man braucht zu diesem Zweck einige Leuchtstoffschichten verschiedener Dicke nur von außen mit Licht zu bestrahlen und die nach beiden Seiten ausgestrahlte Lichtintensität als Funktion von x zu messen. Dabei treten jedoch meist einige Schwierigkeiten auf. Denn einmal wird durch die Vielfachstreuung im Innern der Schicht die Winkelverteilung der Strahlung verändert, so daß man gezwungen ist, bereits mit diffusum Licht einzustrahlen. Will man die — stark wellenlängenabhängigen — Konstanten für den Fall der Erregung von Lumineszenzlicht bestimmen, so muß man andererseits mit einer Strahlung arbeiten, die möglichst gut dem Emissionsspektrum des Leuchtstoffes entspricht.

Es gibt jedoch noch eine andere Methode, um die Größen v und r zu bestimmen. Erregt man nämlich einen Leuchtstoff nur in den obersten Schichten zum Leuchten, so sind beide Bedingungen erfüllt, und man muß nur dafür sorgen, daß die Dicke der erregten Schicht möglichst gering gehalten wird.

Eine solche Art der Anregung einer Leuchtstoffschicht läßt sich mit Hilfe von α -Teilchen geringer Reichweite leicht verwirklichen, so daß die weiter unten zu

⁵⁾ H. C. Hamaker, Philips Res. Rep. 2, 55 (1947).

⁶⁾ J. W. Coltman, E. G. Ebbighausen u. W. Altar, J. Applied Physics (18) 6, 530 (1947).

besprechenden Messungen mit ihnen zur Bestimmung der optischen Konstanten dienen können.

3. Herstellung der Leuchtschirme und Meßanordnung

Die Messungen wurden an einer großen Zahl von auf dünnen Glasplättchen aufgetragenen Leuchtstoffschichten verschiedener Dicke durchgeführt. Als Leuchtstoff diente ein ZnS-Cu-Phosphor, der aus einem Gemisch von Kristallkörnchen nicht allzu verschiedener Größe bestand. Bei der Herstellung der Schirme nach dem Sedimentationsverfahren wurde dafür gesorgt, daß die Korngrößeverteilung innerhalb der einzelnen Schichten möglichst konstant bleibt: Die verschiedenen Schichtdicken wurden dadurch erzeugt, daß verschiedene Substanzmengen gleich lange sedimentiert wurden.

Als Nachweisgerät für die Lumineszenz dienten ein, für eine Reihe von Messungen zwei übereinander angebrachte Sekundärelektronenvervielfacher (Abb. 2).

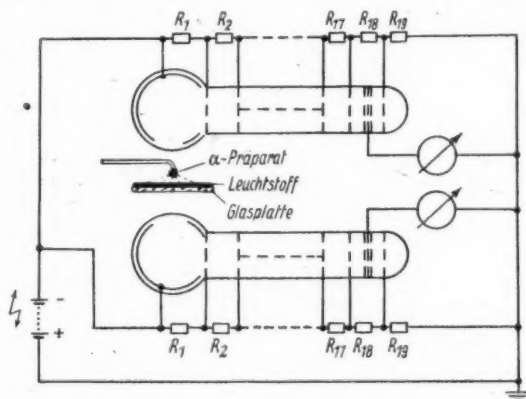


Abb. 2. Meßanordnung mit zwei Sekundärelektronenvervielfachern

Bei Anregung mit α -Teilchen war das etwa $1/10$ mC starke Präparat als dünner, abgewinkelter Stift ausgebildet, bei den Messungen mit γ -Strahlen wurde eine 10 mg-Quelle in unmittelbare Nähe der Leuchtschirme gebracht, während die auch zu den Untersuchungen verwandten Röntgenstrahlen streifend auf den Leuchtschirm auffielen, so daß sie direkt nicht auf die Photokathoden einwirken konnten.

4. Messungen mit α -Teilchen

(Die Bestimmung der optischen Konstanten)

Die Messungen mit α -Teilchen sind in Abb. 3 wiedergegeben. Die Punkte der Kurve I geben die aus der unteren Leuchtstoffseite tretende Lichtintensität als Funktion der Schichtdicke x wieder (gemessen mit dem unteren Vervielfacher der Abb. 2); man erkennt, daß die α -Teilchen bereits bei geringen Massenbelegungen (10 mg/cm^2) völlig absorbiert sind und daß das weitere Hinzufügen von Leuchtstoff die Intensität wieder vermindert. Ganz anders verhält sich die Abhängigkeit

der nach oben (Abb. 2) austretenden Lumineszenzstrahlung von der Schichtdicke (Abb. 3, Kurve II). Hier beobachtet man ein langsames Ansteigen der Intensität bis zu einem Sättigungswert und erkennt, daß die Wirkung der nicht erregten unteren Schichten mit der Wirkung eines reflektierenden Spiegels zu vergleichen ist. Der Anschluß der beiden Kurven aneinander erfolgte dadurch, daß die Meßwerte bei sehr kleinen Werten von x , bei denen die Streuung und Absorption des Lumineszenzlichtes noch zu vernachlässigen war, einander gleichgesetzt wurden.

Aus den Punkten der Kurve I wurden die Konstanten v und r bestimmt. Dabei wurde vorausgesetzt, daß der Abfall der Kurve vom Maximum ab so verläuft, als ob er von außen, d. h. von den ersten 10 mg her bestrahlt würde und daß die Streuwirkung dieser ersten erregten Schicht zu vernachlässigen ist. Diese Voraussetzung ist — jedenfalls bei dem untersuchten Leuchtstoff — ziemlich gut erfüllt, so daß der gemessene Abfall der Intensität mit wachsendem x direkt durch die Funktion $T(x)$ wiedergegeben werden kann. Es wurde gefunden, daß der Verlauf der Punkte der Kurve I durch die Gl. 14 am besten beschrieben wird, wenn die Konstanten gewählt werden zu:

$$\left. \begin{aligned} v &= 2,84 p \\ r &= 2,66 p \end{aligned} \right\} p = 1,65 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{mg}, \quad .$$

was umgerechnet auch bedeutet, daß beispielsweise eine Schicht von 1 mg/cm^2 einen Bruchteil einer auffallenden Strahlung $r = 4,68\%$ reflektiert und $v - r = 0,3\%$ absorbiert.

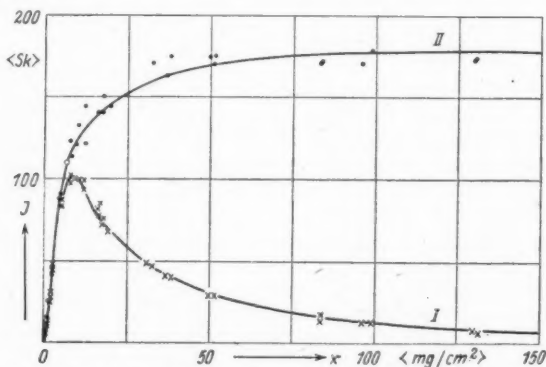


Abb. 3. Lumineszenzlichtintensität als Funktion der Schichtdicke x bei α -Teilchen-Anregung. Kurve I: Nach unten austretende Intensität I . Kurve II: Nach oben austretende Intensität I .

Die so auch zahlenmäßig festgelegte Abhängigkeit der Transparenz von x ist in die Abb. 3 als ausgezogene Kurve I eingezeichnet und gibt den gemessenen Verlauf mit guter Näherung wieder.

Es läßt sich aber weiter zeigen, daß auch der Verlauf der Meßwerte der Kurve II mit Hilfe der Konstanten v und r von dem Punkt an, wo die α -Teilchen völlig

absorbiert sind, durch die oben gefundenen mathematischen Gesetzmäßigkeiten wiedergegeben werden kann. Es wurde in die Abb. 3 als ausgezogene Kurve bereits die Funktion $R(x)$ (Gl. 13) eingetragen, wobei für v und r die oben angegebenen Werte verwendet wurden. Um eine gute Übereinstimmung zu erhalten, muß hier allerdings der Nullpunkt der Kurve bei etwas kleineren Schichtdicken, als es dem Maximum der Kurve I entspricht, liegen, was wohl eine Folge der Vernachlässigung der doch ein wenig reflektierenden ersten Schichten ist. Man erkennt übrigens aus der Abb. 3, daß bei dem untersuchten Leuchtstoff die wahre erzeugte Lichtintensität zwischen den beiden Kurven bei $x = 10$ mg liegen muß, d. h. also das Maximum von Kurve I etwa um 5–10% übersteigt.

5. Messungen mit γ -Strahlen

Die Differentialgleichung (7) läßt sich durch Integration nach I auflösen, so daß man erhält:

$$I = \left\{ \int_0^x E(x) (1 + R) e^{\int_0^x (v-r) R dx} dx \right\} e^{-\int_0^x (v-r) R dx} \quad (16)$$

$$= \left\{ \int_0^x E(x) \frac{(1+R)}{T} dx \right\} \cdot T.$$

Diese Gleichung läßt sich für einige Funktionen $E(x)$ und bei Kenntnis der Funktionen $R(x)$ und $T(x)$ (Gl. (13) und (14)) elementar integrieren. Besonders einfach wird der Ausdruck für den Fall, daß $E(x) = E = \text{const.}$ ist. Man findet dann:

$$I = G(x) = \frac{E}{v-r} \{1 - (R + T)\}. \quad (17)$$

Dieser Fall liegt vor bei Anregung von Leuchtstoffschichten mit γ -Strahlen, die in den in Frage kommenden Schichtdicken praktisch nicht geschwächt werden und daher alle Teile des Leuchtstoffes gleichmäßig zum Leuchten anregen. In diesem Falle ist auch die nach oben oder unten (Abb. 2) austretende Lichtintensität für alle Schichtdicken gleich groß, was mathematisch auch dadurch zum Ausdruck kommt, daß sich bei Gleichsetzung der rechten Seiten von Gl. (7) und (8) ebenfalls der Ausdruck (17) ergibt.

Die Meßergebnisse bei Anregung mit γ -Strahlen sind in Abb. 4 dargestellt. Die eingezeichneten Punkte entsprechen dabei der nach unten (Abb. 2) austretenden Lichtintensität I ; wie gleichzeitige Messungen mit dem oberen Vielfacher zeigten, ist aber die Intensität i erwartungsgemäß für jede Schicht ebenso groß, so daß auf die Wiedergabe verzichtet werden kann. Im Gegensatz zur Anregung mit α -Teilchen besteht die Funktion $G(x)$ aus einem erst linear und dann langsamer werdenden Ansteigen der austretenden Lichtintensität mit wachsender Schichtdicke. Die Tangente für $x = 0$ ist ein Maß für die Größe E und kann zu ihrer Bestimmung dienen. Ist aber E bekannt, so ist die Funktion $G(x)$ durch die oben gefundenen Werte von v und r eindeutig festgelegt und muß den Verlauf der Meßpunkte wiedergeben. Dies bestätigt auch die Abb. 4, in der die ausgezogene Kurve die berechnete Funktion $G(x)$ darstellt und offensichtlich den Meßpunkten

gut entspricht. Man erkennt auch, daß die Kurve sich bei größeren Werten von x einem Grenzwert nähert, eine Tatsache, die bei früheren Messungen³⁾ an anderen Leuchtstoffen noch deutlicher beobachtet werden konnte. Nach Gl. (17) ist der Grenzwert gegeben durch:

$$G(x) = \frac{E}{v-r} \left\{ 1 - \frac{r}{v+p} \right\} = E \cdot \frac{1}{p} \left\{ 1 + \frac{r}{v+p} \right\}. \quad (18)$$

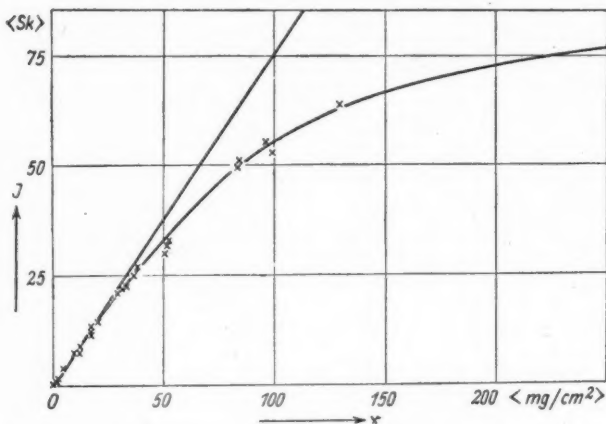


Abb. 4. Lumineszenzlichtintensität als Funktion der Schichtdicke x bei γ -Strahlen-Anregung

Bei Kenntnis von E kann diese Gleichung dazu dienen, aus Messungen an Leuchtstoffen großer Schichtdicke das Verhältnis von v zu r zu ermitteln. Umgekehrt läßt sich, bei Kenntnis von v und r , aus Messungen bei kleinen Werten von x die maximale technische Ausbeute bei γ -Anregung vorausberechnen.

6. Messungen mit Röntgenstrahlen

Wieder anders als bei Erregung der Leuchtstoffschichten mit α - oder γ -Strahlen liegen die Verhältnisse bei Verwendung von Röntgenstrahlen. Denn einerseits kann man hier nicht mehr voraussetzen, daß nur ein kleiner Teil des Leuchtstoffes erregt wird, während andererseits von gleichmäßiger Erregung keine Rede ist.

Es gibt zwei prinzipiell verschiedene Wege, um trotzdem die Verhältnisse zu klären, insbesondere um die in einer bestimmten Schichtdicke erzeugte Lichtintensität zu ermitteln. Man kann einmal — wie dies auch von einigen Autoren vorgeschlagen worden ist^{5) 6)} — annehmen, daß die pro Schichtdickeneinheit absorbierte Röntgenstrahlung exponentiell abnimmt, daß also $E(x) = C \cdot e^{-\mu x}$ ist; in diesem Fall läßt sich Gl. (16) ebenfalls elementar integrieren, so daß durch Vergleich der gemessenen und der errechneten Kurven der Absorptionskoeffizient μ ermittelt werden kann; die Annahme des rein exponentiellen Verlaufes von $E(x)$ dürfte jedoch fast nie streng erfüllt sein, vor allem wenn man mit nicht monochromatischer Röntgenstrahlung arbeitet.

Die andere, von jeder speziellen Voraussetzung unabhängige Methode — die also auch für jede andere Anregungsart gilt — besteht darin, daß entsprechend der Grundgleichung (7) der Wert von $E(x)$ aus den gemessenen I -Kurvenwerten durch graphische Integration bzw. Differentiation ermittelt wird.

Es gilt nämlich nach Gl. (7):

$$E(x) = I \cdot \frac{v - rR}{1 + R} + \frac{dI}{dx} \frac{1}{1 + R} \quad (19)$$

oder entsprechend:

$$\int_0^x E(x) dx = (v + r) \int_0^x I \frac{1 - R}{(1 + R)^2} dx + \frac{I}{1 + R}. \quad (20)$$

Da hierin alle Größen gemessen werden können, bzw. bekannt sind, ist $E(x)$ bzw. $\int_0^x E(x) dx$ eindeutig festgelegt.

In diesem Fall wurde die durch die Röntgenstrahlung erzeugte, austretende Lichtintensität nur mit einem Vervielfacher gemessen, also nur die Intensität I

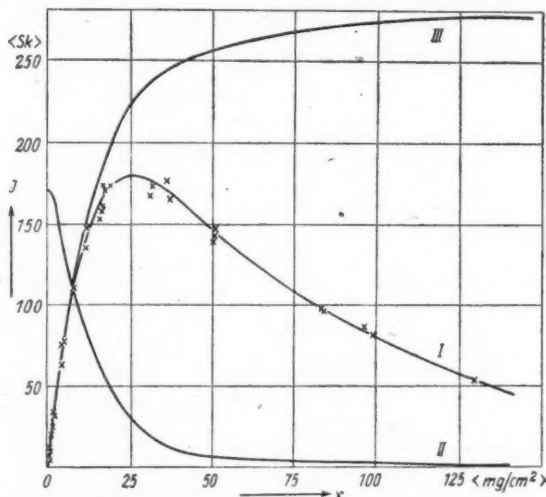


Abb. 5. Lumineszenzlichtintensität als Funktion der Schichtdicke x bei Röntgenstrahlen-Anregung. Kurve I: Gemessene, nach unten austretende Intensität I .

Kurve II: Pro Schichtdickeneinheit erzeugte Intensität $E(x)$.

Kurve III: Insgesamt erzeugte Intensität $\int_0^x E(x) \cdot dx$

in Abhängigkeit von x untersucht (Abb. 5). Gearbeitet wurde mit einer Röntgenröhre mit Kupferanode, 30 kV Strahlspannung und einem 10μ dicken Ni-Filter, so daß die erzeugten Röntgenstrahlen außer der charakteristischen Linie nur noch

einen gewissen Anteil (etwa 20%) von härterer Strahlung enthielten. Aus der experimentellen Kurve *I* wurde nach Gl. (19) und (20) die pro Schichtdickeneinheit erzeugte Lichtintensität $E(x)$ (Kurve *II*) und die insgesamt in der Schichtdicke x erzeugte Lichtintensität $\int_0^x E(x) dx$ (Kurve *III*) in Abhängigkeit von x erhalten.

Offensichtlich liegt hier nicht der rein exponentielle Fall vor, das Abklingen von $E(x)$ mit wachsendem x (Kurve *II*) erfolgt vielmehr nach einem anderen Gesetz. Es scheint, daß der weiche Anteil bei etwa 40 mg/cm² völlig absorbiert ist, während die harte Komponente eine Eindringtiefe von etwa 130 mg/cm² besitzt. Ein Vergleich der Kurve mit den Absorptionskoeffizienten für die K_{α} -Linie von Kupfer und einer Röntgenstrahlung von 25–30 kV scheint diese Annahme zu bestätigen.

Aus Abb. 5 wird deutlich, daß zwischen dem Maximum der meßbaren Intensität (Kurve *I*) und der tatsächlich insgesamt erzeugten Intensität (Kurve *II*) ein beträchtlicher Unterschied besteht, und man erkennt den großen Einfluß von Streuung und Absorption in polykristallinen Leuchtstoffschichten: Eine genaue Bestimmung der Absolutausbeute erscheint ohne Kenntnis des funktionellen Zusammenhanges der Gl. (19) bzw. (20) ziemlich schwierig.

Die angegebene Methode zur Vestimmung von $E(x)$ hat im übrigen auch meßtechnische Bedeutung: Da die Ausbeute η bei einigen Leuchtstoffen praktisch unabhängig von der Art der Anregung ist⁴⁾, ist in diesem Fall nach Gl. (6) der errechnete Wert von $E(x)$ ein direktes Maß für die absorbierte Strahlungsenergie $S(x)$, so daß Messungen der technischen Ausbeute I bzw. i auch dazu dienen können, die Qualität einer erregenden Strahlung zu ermitteln.

7. Die Abhängigkeit der optischen Konstanten von der Größe der Leuchtstoffkörner

Die optischen Konstanten v und r hängen bei einem bestimmten Leuchtstoff naturgemäß von der Korngröße, oder genauer von der Korngrößenverteilung der unterschiedlich großen Kriställchen innerhalb des Leuchtschirmes ab. Um diese Abhängigkeit zu untersuchen, wurden vergleichende Messungen mit einer zweiten sehr grobkörnigen Charge des untersuchten ZnS-Cu-Leuchtstoffes durchgeführt. In den Abb. 6 und 7 sind Mikroaufnahmen zweier Leuchtschirme der beiden Leuchtstoffsorten wiedergegeben. Da es sich um zwei sehr dünne Leuchtstoffschichten (ca. 3 mg/cm²) handelt, ist die Bedeckung der Glasunterlage noch ziemlich unvollständig. Man erkennt, daß der grobkörnige Leuchtstoff einen viel geringeren Bedeckungsfaktor ergibt als der feinkörnige, so daß bei ihm erst bei tieferen Schichten die ganze Unterlage bedeckt ist. Dieser Effekt wurde bei der Ableitung der Gleichungen — die ja unter der Annahme einer homogenen Leuchtsubstanzen erfolgte — nicht berücksichtigt, so daß der Verlauf der Meßkurven bei grobkörnigem Material bei dünnen Schichten anders sein dürfte als bei der bisher untersuchten Leuchtstoffsorte.

Aus den Abb. 6 und 7 wurde die mittlere Korngröße der beiden Chargen bestimmt, und es ergab sich für den feinkörnigen Stoff ein mittlerer Durchmesser von 17 μ , für die grobkörnige Substanz von 36 μ , also ein Verhältnis von etwa 1:2. Dabei ist zu berücksichtigen, daß ein Teil der Körnchen

eine kleinere Höhe besitzen dürfte, als es der aus den Abb. 6 und 7 zu entnehmenden mittleren Breite und Länge entspricht, da plättchenförmige Teil-

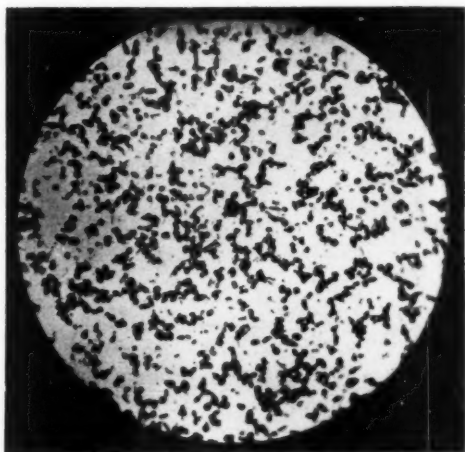


Abb. 6. Mikrophotographie des feinkörnigen ZnS-Cu-Leuchtstoffes (Vergrößerung 40fach) ($x \approx 3 \text{ mg/cm}^2$)

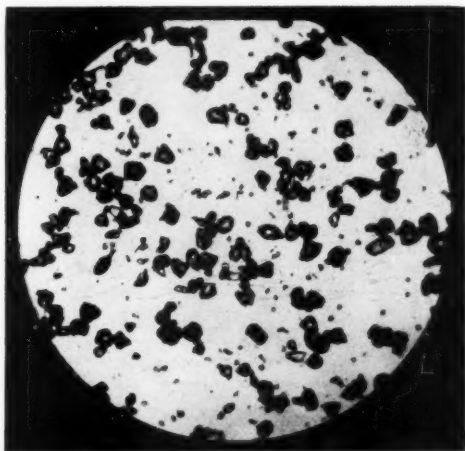


Abb. 7. Mikrophotographie des grobkörnigen ZnS-Cu-Leuchtstoffes (Vergrößerung 40fach) ($x \approx 3 \text{ mg/cm}^2$)

chen nach dem Sedimentieren zumeist auf der flachen Seite liegen. Da dies jedoch für beide Sorten etwa gleich wirken dürfte, wird das Verhältnis von 1:2 dadurch kaum gefälscht sein. Um den hierzu reziproken Faktor 2 wird

sich die Zahl der Reflektionen an den Kristallflächen verändern, wenn zwei Leuchtschirme gleicher Schichtdicke aber verschiedener Chargen verglichen werden, jedenfalls solange wie das Problem voraussetzungsgemäß als linear behandelt werden kann.

Die Messungen mit α -Teilchen gibt Abb. 8 wieder. Die Kurve *I* ist die Kurve *I* der Abb. 3 mit der feinkörnigen Charge; die Kurve *II* wurde unter sonst gleichen Bedingungen mit dem grobkörnigen ZnS-Cu erhalten. Die Verschiebung des Maximums beim grobkörnigen Leuchtstoff ist eine Folge der erwähnten, bei gleicher Schichtdicke geringeren Bedeckung. Erst bei etwa 20 mg/cm² treffen alle α -Teilchen auf Leuchtstoff, während vorher ein Teil der Strahlung in der Unterlage ohne Lichterzeugung absorbiert wird. Der dem Maximum folgende Abfall der Lichtintensität ist bei Kurve *II* flacher als bei Kurve *I*, eine Folge der geringeren Streuung und Absorption des Lumineszenzlichtes. Bestimmt man wieder die optischen Konstanten, so ergibt sich für Kurve *II*:

$$\left. \begin{aligned} v_{II} &= 2,84 p_{II} \\ r_{II} &= 2,66 p_{II} \end{aligned} \right\} p_{II} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{mg}.$$

Es ergibt sich somit die interessante Tatsache, daß die zu erwartende Verkleinerung der Werte von v und r derart erfolgte, daß ihr Verhältnis konstant ge-

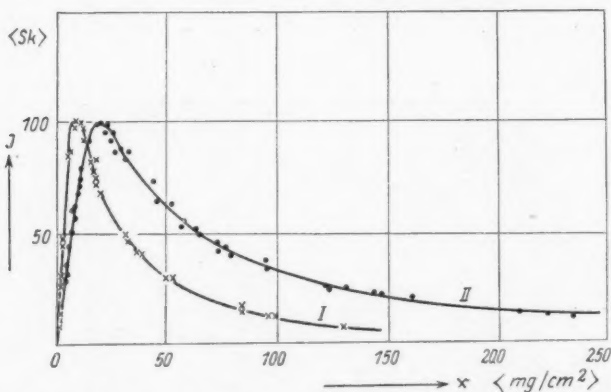


Abb. 8. Nach unten austretende Lumineszenzlichtintensität I als Funktion der Schichtdicke x bei α -Teilchen-Anregung. Kurve *I*: Feinkörniger Leuchtstoff. Kurve *II*: Grobkörniger Leuchtstoff

blieben ist. Die Verkleinerung der Konstanten r ist einfach zu erklären: Das Lumineszenzlicht braucht auf seinem Weg in der Leuchtstoffschicht weniger Kristallflächen zu passieren und wird daher weniger oft reflektiert. Zahlenmäßig stimmen die Verhältnisse recht gut: Die Zahl der übereinander liegenden Kristallkörner, und damit auch die Zahl der Reflektionen, verhält sich bei gleicher Schichtdicke der beiden Leuchtstoffchargen *I* und *II* etwa 2:1, also ebenso wie die entsprechenden Konstanten r und r_{II} . Überraschender ist, daß auch das Verhältnis von $v:r_{II}$ ebenso groß ist, d. h. daß auch die wahre Absorption pro Schicht-

die Kineinheit $v - r$ mit der Zahl der Reflektionen abnimmt. Es gibt zwei Möglichkeiten, diesen Effekt zu erklären: Entweder findet die wahre Absorption nur im Zusammenhang mit der Reflektion in unmittelbarer Nähe der Kristalloberfläche statt, und die eigentliche Absorption im Innern der Kristalle ist vernachlässigbar klein, oder aber durch Vergrößerung der Zahl der Reflexionen wird dazu proportional der Lichtweg in der Leuchtstoffschicht erhöht. Allerdings muß darauf hingewiesen werden, daß die Genauigkeit, mit der die Differenz $v - r$ angegeben werden kann, infolge des sehr großen Unterschiedes zwischen Streuung und Absorption, ziemlich gering ist. Aus diesem Grunde lassen sich die Vorgänge in den einzelnen Leuchtstoffkörnern erst genau untersuchen, wenn die Abhängigkeit der

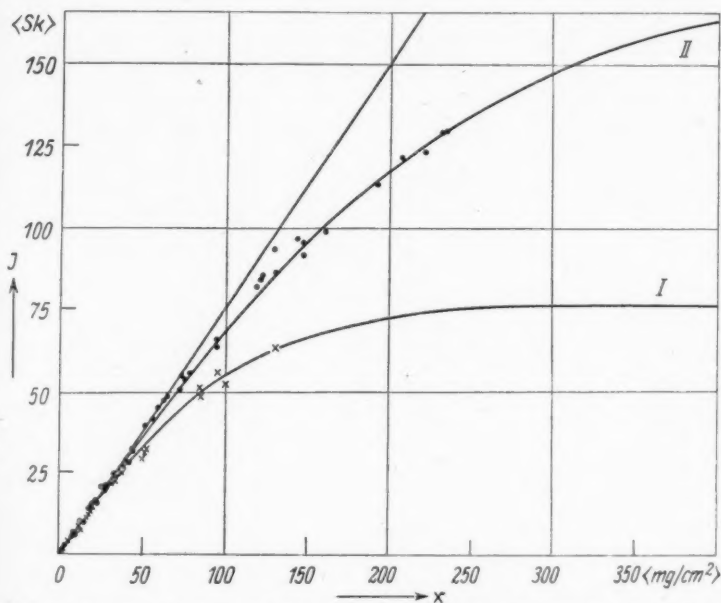


Abb. 9. Nach unten austretende Lumineszenzlichtintensität I als Funktion der Schichtdicke x bei γ -Strahlen-Anregung. Kurve I: Feinkörniger Leuchtstoff. Kurve II: Grobkörniger Leuchtstoff

optischen Konstanten von der Korngröße an erheblich mehr Sorten eines Leuchtstoffes und an verschiedenen lumineszierenden Substanzen gemessen worden ist.

Für den grobkörnigen Leuchtstoff wurden vergleichende Messungen auch noch mit γ -Strahlen durchgeführt (Abb. 9). Hier ist der Einfluß der Korngröße besonders deutlich zu sehen. Während die Tangente (ein Maß für die physikalische Ausbeute) bei beiden Kurven die gleiche ist, entspricht die Kurve II wesentlich größeren, aus der Schicht austretenden Lichtintensitäten: Die gesamte wahre Absorption ist bei gleichen Schichtdicken bei dem größeren Leuchtstoff geringer. Die ausgezogene Kurve II ist übrigens wieder aus den mit α -Teilchenanregung ge-

fundenen Werten von r_{II} und r_{II} und der Tangente berechnet worden und entspricht völlig den gemessenen Punkten.

Herrn Prof. H. Kallmann, der mich zu dieser Arbeit anregte, Herrn Prof. E. Ruska, der mir die Durchführung der Messungen ermöglichte und mich durch wertvolle Diskussionen unterstützte, und Herrn Dipl.-Ing. C. Reuber, der mir seine Apparatur für die Messungen mit zwei Multipliern zur Verfügung stellte, möchte ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen.

Ferner danke ich Fräulein I. Klaupt, die die Herstellung der vielen, zu den Untersuchungen benötigten Leuchtschirme übernahm und mir bei den Messungen hervorragende Hilfe leistete.

Berlin-Dahlem, Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie
und Elektrochemie.

(Bei der Redaktion eingegangen am 23. September 1949.)

Die Sekundärelektronenemission von Metallmischungen

Von H. Salow

(Mit 5 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Die aus 2 Komponenten, Ag und Cu einerseits, und Mg, Al, Be andererseits, durch gleichzeitiges Verdampfen im Hochvakuum hergestellten Metallmischungen besitzen ähnliche Sekundäremissionseigenschaften wie erschmolzene Legierungen aus den entsprechenden Komponenten. Nach einem Formierungsprozeß in Anwesenheit von geringen Mengen von O_2 ergeben sich Sekundäremissionsfaktoren in der Nähe von 10 bei einer Geschwindigkeit der Primärelektronen von 500 Volt. Die Metallmischungen, insbesondere Cu—Mg, lassen sich leicht formieren; sie sind elektrisch und thermisch stabil und gegen trockene, CO_2 freie Fremdgase unempfindlich. Als technische Sekundäremissionskathoden sind solche Schichten gut geeignet. Für die Bildung hochemittierender Kathoden ist nicht das Konzentrationsverhältnis der beiden Metallkomponenten zueinander, sondern ein nicht oxydierter Anteil des Erdalkalimetalles innerhalb der oxydierten Grundschrift von Bedeutung. Diese Tatsache und das Auftreten eines negativen Temperaturkoeffizienten der Sekundäremissionsfaktoren lassen den halbleitenden Charakter der formierten Schichten deutlich erkennen.

In der vorliegenden Arbeit werden die Sekundärelektronenemissionseigenschaften von Metallmischungen untersucht, die im Vakuum aus zwei Komponenten gleichzeitig auf eine Unterlage aufgedampft sind. Diese Eigenschaften erscheinen deshalb interessant, weil in den letzten Jahren in einer Anzahl von Arbeiten ^{1) 2) 3) 4)} recht hohe SE-Ausbeuten (Sekundäremission im folgenden als SE abgekürzt) an Legierungen gefunden wurden, die aus zwei verschiedenen Metallen bestehen. Es handelt sich dabei vornehmlich um Legierungen, die aus einer „schweren“ Metallkomponente, wie Cu, Ag, Au und Ni und aus einer „leichten“ Metallkomponente, wie Al, Mg und Be gebildet sind. Solche Legierungen zeigen nach einem Formierungsprozeß bei hohen Temperaturen in Anwesenheit von geringen Mengen Sauerstoff

¹⁾ G. Gille, Sekundäremission von Nickel-Berylliumlegierungen, Z. techn. Physik **22**, 228 (1941).

²⁾ R. Kollath, Neuere Untersuchungen über die Sekundärelektronenemission von Legierungen, Fernsehen und Tonfilm **1941**, 13.

³⁾ J. Matthes, Untersuchungen über die Sekundäremission von verschiedenen Legierungen. Z. techn. Physik **21**, 232 (1941).

⁴⁾ V. K. Zworykin and J. A. Rajchman, Proc. Inst. Radio Engrs. N. Y. **27**, 558 (1939).

einen hohen SE-Faktor. Bedenkt man, daß die reinen Metalle, sowohl die schwere wie die leichte Metallkomponente, jede für sich einen sehr kleinen Faktor besitzen, erstere einen Faktor etwas über Eins, letztere etwas unter Eins, so sind die erzielten Faktoren ($\delta \sim 10$) erstaunlich, und es liegt nahe, an besondere Strukturverhältnisse zu denken, die durch den Formierungsprozeß entstehen und den hohen SE-Faktor bedingen. Gille¹⁾ nimmt deshalb an, daß insbesondere solche Legierungen, die bei hohen Temperaturen eine Auskristallisation der leichten Komponente zeigen, zur Erzielung einer großen SE-Ausbeute geeignet sind. Im folgenden wird geprüft, welche SE-Faktoren sich mit Metallmischungen, die eine ähnliche Zusammensetzung wie die Legierungen besitzen, gewinnen lassen, welche Konzentrations-, Temperatur- und Formierungseinflüsse vorliegen, inwieweit die Faktoren stabil und reproduzierbar sind, und schließlich, welche Empfindlichkeit sie gegen Fremdgase besitzen. Sollten bei der Bildung der emittierenden Schichten Struktureinflüsse im Spiele sein, so müßten sich diese gegenüber den Legierungen in unterschiedlichen Sekundäremissionseigenschaften bemerkbar machen. Denn bei den im Vakuum aufgedampften mikrokristallinen Schichten sind weder Mischkristalle noch Auskristallisierung der leichten Komponente zu erwarten.

Herstellungs- und Meßverfahren der untersuchten Schichten

Die Metallmischungen werden nach folgendem Verfahren hergestellt. In einem evakuierbaren Glasgefäß befinden sich zwei Wolframbänder (vgl. Abb. 1), von denen das eine Band mit einem schweren Metall, z. B. Ag beschickt ist, während

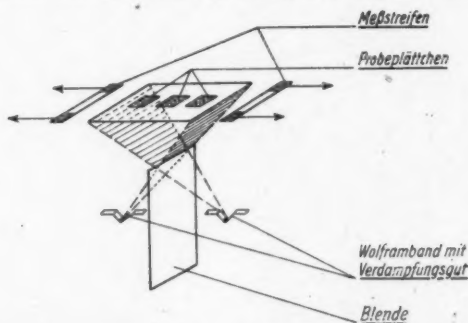


Abb. 1. Schematische Darstellung des Verdampfungsverfahrens

das andere Band ein leichtes Metall, z. B. Al enthält. Die Wolframbänder werden soweit erhitzt, bis beide Metalle zu verdampfen anfangen. Bei gutem Hochvakuum (Gasdruck $\sim 10^{-8}$ mm Hg) durchdringen sich die Strahlenkegel der Metalle ungehindert und beide Metalle schlagen sich als Mischung auf den über den Wolframbändern angeordneten Probeplättchen nieder, die aus vorher sorgfältig entgasten CuNi- oder CrNi-Bleichen bestehen. Zwischen den Wolframbändern befindet sich eine Blende. Diese sorgt dafür, daß nur oberhalb der Blende eine Durchdringungszone der beiden Metalle auftritt, während rechts und links von ihr Halbräume entstehen, in denen sich nur je eine Metallkomponente ausbreitet. In jedem dieser Halbräume ist ein Meßstreifen aus Glimmer angeordnet, der am Ende mit Silber-

kontakten versehen ist. Sobald eine hinreichende Menge des Metalls verdampft ist, bildet sich zwischen den Kontakten eines Streifens eine metallische Brücke, deren Widerstand ein Maß der verdampften Metallmenge darstellt. Durch eine solche Widerstandsmessung läßt sich leicht die Verdampfungsgeschwindigkeit der einzelnen Metallkomponenten kontrollieren und jedes gewünschte Mischungsverhältnis der Metalle einstellen.

Nach dem Bedampfen werden die Probeplättchen in möglichst kurzer Zeit in die Meßapparatur eingebaut. Die Meßanordnung (vgl. Abb. 2) enthält ein Elektronenstrahlerzeugungssystem (Wolframkathode), mit der der Primärelektronenstrahl gewonnen wird, einen Auffangkäfig für die Sekundärelektronen, eine

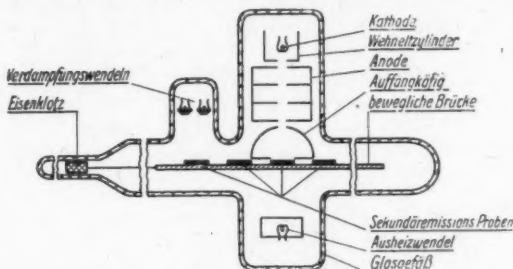


Abb. 2. Schnitt durch die Meßapparatur

Heizwendel, mit der die Versuchsplättchen erhitzt werden können, sowie zwei weitere Wolframspiralen, aus denen jeweils noch die leichte oder schwere Metallkomponente nachgedampft werden kann. Der SE-Faktor wird aus den an den Proben zu- und abfließenden Strömen in bekannter Weise ermittelt. Die Metallplättchen sind in einer von außen mit Hilfe eines Magneten bewegten Brücke angeordnet. Es können so in einem Arbeitsgang jeweils 5 Proben untersucht werden, was sich für die Auffindung des geeigneten Formierungsprozesses und für die Beurteilung seiner Reproduzierbarkeit günstig auswirkte. Neben den im Vakuum aufgedampften Mischmetallen wurden auf die gleiche Art auch Proben einiger erschmolzener Legierungen untersucht.

Versuchsmethodik und Versuchsergebnisse

Als schweres Grundmetall wurde für alle Mischungen Kupfer oder Silber gewählt. (Wenige Proben wurden auch mit Nickel und Chrom hergestellt, wegen der schwierigen Verdampfung von Ni und Cr wurde dieser Weg wieder verlassen.) Zu diesem Grundmetall wurden verschiedene Gewichtsprozent Aluminium, Beryllium und Magnesium in der beschriebenen Art dazugesetzt. Dabei wurde die Schichtdicke auf durchschnittlich 1500 ÅE eingestellt. Diese Dicke ist groß genug, um auch bei den höchsten hier verwendeten Spannungen ($V_p = 2500$ Volt) einen Einfluß des Unterlagematerials vollkommen auszuschalten. Ein solcher konnte auch an keiner Stelle nachgewiesen werden. Wenn die Proben in die Meßapparatur eingebaut sind, werden sie zunächst mit dem Ofen einige Stunden auf 400° ausgeheizt. Bei dieser Temperatur formieren die Platten noch nicht, der SE-Faktor ist noch sehr klein, er liegt bei fast allen Proben zwischen 1 und 2. Die Plättchen werden nun einzeln durch Elektronenstoßheizung auf Temperaturen zwischen

550° und 750° C gebracht. Im allgemeinen genügt hierzu eine Zeit von 20 Minuten bis 1 Stunde. (Das ist erheblich weniger als Gille¹⁾ und Mattes²⁾ für die Formierungszeiten der Legierungen angeben.) Bei jedem Formierungsprozeß ist die Anwesenheit von Sauerstoff notwendig. Der Sauerstoffdruck ist dabei nicht kritisch, im allgemeinen genügt schon ein Druck von 10^{-4} bis 10^{-3} mm Hg. Auch Glimmentladungen sind gelegentlich wirksam zur Erreichung hoher Sekundäremissionsausbeuten. Auf jeden Fall muß wenigstens einmal während der Formierung ein endlicher, wenn auch niedriger Sauerstoffdruck vorhanden sein, andernfalls bleiben die SE-Faktoren kleiner als 3 oder 4³⁾). Unter den richtigen Bedingungen steigt der SE-Faktor während des Heizens bei den Magnesiumlegierungen schnell an, Be und Al-Metallmischungen benötigen etwas längere Formierungszeiten und höhere Temperaturen. Der Faktor behält einige Zeit seinen Höchstwert und fällt dann langsam ab, wenn die Heiztemperatur beibehalten wird. Dieser „überformierte“ Zustand kann durch Nachdampfen der leichten Komponente und erneutes Formieren wieder aufgehoben werden.

In Tabelle 1 sind die Ergebnisse von 88 Formierungsprozessen an verschiedenen Metallmischungen und an einigen Legierungen wiedergegeben. Die erste Spalte

Tabelle 1

	Ag				Cu			
	Konzentration in Gewichts-%	δ -Wert bei 500 Volt	Formierungs-		Konzentration in Gewichts-%	δ -Wert bei 500 Volt	Formierungs-	
			Temp. °C	Dauer			Temp. °C	Dauer
Mg	5% Mg	9,5 (6)	570–620	~30'	5% Mg	12,2 (4)	550–620	~35'
	15% Mg	8,5 (4)	570–620	~40'	10% Mg	9,4 (10)	570	~30'
					15% Mg	9,1 (4)	570–620	~30'
	5% Mg Leg.	9,2 (12)	570	~30'				
Al	2,2% Al	5,1 (3)	600–680	~70'	15% Al	7,6 (4)	600	~40'
	1,4% Al	3,8 (3)	620–670	~50'	5% Al	9,6 (4)	620	~30'
Be	5% Be	4,9 (4)	720	~60'	2,3% Be	5,7 (4)	720–770	~60'
	15% Be	7,8 (4)	650	~50'	5% Be	6,2 (4)	650–700	~40'
					2% Be Leg.	5,2 (10)	650–700	~40'
Ca	1,3% Ca	4,9 (4)	700–750	30'				
Ba	<5% Ba	2,0 (4)	550–780	90'				

Die Tabelle enthält in der ersten Spalte die jeweils zu Ag oder Cu hinzugefügte Menge Erdalkalimetall in Gewichtsprozenten; in der zweiten Spalte den Mittelwert der SE-Faktoren bei $V_p = 500$ Volt aus einer Anzahl von Formierungsprozessen, die in Klammern dahintergesetzt ist; in den letzten Spalten die ungefähre Formierungstemperatur in °C und Formierungsdauer in Minuten.

¹⁾ Dies geringe Anwachsen der Faktoren zeigt, wie später begründet wird, daß schon bei einem Druck von 10^{-5} mm Hg eine Gasaufnahme der Schichten eintritt. Insbesondere besitzen Mg-Schichten eine bedeutende Getterwirkung, wie ihre Verfärbung im besten Hochvakuum beim Formieren ausweist.

²⁾ Anmerkung bei der Korrektur: H. A. Stahl weist in seiner Arbeit „The structure of extremely thin layers evaporated in kinetic vacuum systems“, J. appl. Phys. 20, 1 (1949), bei im Hochvakuum aufgedampftem und thermisch behandeltem Mg und Be röntgenographisch die Sauerstofflinien nach.

der Tabelle gibt jeweils für die Grundmetalle Silber und Kupfer der Mischung den Prozentsatz des zugesetzten Leichtmetalles in Gewichtsprozenten. Die zweite Spalte enthält den maximalen SE-Faktor δ , der während des Formierungsprozesses bei einer Energie der Primärelektronen von $V_p = 500$ Volt aufgetreten ist. Dieser SE-Wert deckt sich nicht immer mit dem des Maximums der SE-Kurve. Letzterer liegt manchmal, besonders bei stark formierten Schichten, bis zu 10% höher. Die angegebenen δ -Werte stellen Mittelwerte verschiedener Proben dar, deren Anzahl in Klammern hinter jedem SE-Wert vermerkt ist. Die folgende Spalte gibt die mittlere Temperatur an, die sich bei der Formierung als günstig herausgestellt hat, die letzte Spalte enthält schließlich die ungefähre Formierungszeit, die bis zur Bildung der angegebenen SE-Faktoren gebraucht wurde.

Die Versuche zeigen, daß Magnesium in Verbindung mit Cu und Ag die besten Resultate liefert. (Auch hinsichtlich Reproduzierbarkeit und Stabilität übereinstimmen die aufgedampften Mg-Schichten alle anderen.) Aluminium ergibt in Verbindung mit Kupfer noch gute Faktoren. Merkwürdigerweise liefert die Kombination Al—Ag keine hohen SE-Werte. Vielleicht ist hier bei den Proben der Aluminiumgehalt zu gering gewesen. Auch bei den mit Beryllium gemachten Versuchen liegen die erzielten Faktoren nur zwischen 4,9 und 7,8. Ca und Ba erweisen sich als Bestandteil der Metallmischung als ungeeignet. Vermutlich oxydierten die Schichten schon während des kurzen Einbauprozesses so stark, daß sich ein richtiger Formierungsprozeß nicht mehr durchführen ließ.

Zum Vergleich mit den aufgedampften Mischungen wurde eine kompakte Silber-Magnesium-Legierung und Kupfer-Berylliumbronze herangezogen. Sie ergaben praktisch die gleichen Resultate wie die entsprechenden Aufdampfschichten. Es muß allerdings betont werden, daß die Legierungsschichten schwieriger zu formieren sind und nicht so gleichmäßige Resultate liefern. So streuen z. B. die δ -Werte der Mg—Ag-Legierung zwischen 4 und 14, während die Aufdampfschichten aus Cu und 10% Mg sich gut um den Mittelwert gruppieren, die höchsten Abweichungen liegen bei $\delta = 7,5$ und $\delta = 12$. Die von Matthes³⁾ angegebenen hohen SE-Werte für die Kupfer-Beryllium-Legierung konnten an den hier verwendeten Proben nicht erzielt werden. Ein hinreichender Grund ließ sich dafür nicht finden.

In dem untersuchten Bereich von 5—15% ist ein Einfluß der Mg-Konzentration bei den Mg-Mischungen weder mit Cu noch mit Ag zu erkennen. Auch aus den Versuchen mit Beryllium läßt sich keine wesentliche Änderung mit dem Mischungsverhältnis ablesen. Ob bei den Aluminiumschichten ein Konzentrationseinfluß auftritt, möge dahin gestellt bleiben. Auf jeden Fall hat der Formierungszustand der Schicht einen weit größeren Einfluß auf die SE-Eigenschaften als das Mischungsverhältnis der Komponenten. Die Formierungsdauer und die Formierungstemperatur steigen mit dem Schmelzpunkt der Leichtmetallkomponente vom Mg über Al bis zum Be an. Die Abbildungen 3 und 4 geben eine Auswahl von SE-Kurven (δ in Abhängigkeit von der Voltgeschwindigkeit V_p der Primärelektronen), wie sie bei den behandelten Schichten auftreten. Sie zeigen gegen die bekannten SE-Kurven der Metalle oder zusammengesetzten Cs-Schichten keine Besonderheiten. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß die stark oxydierten Schichten und auch die überformierten Schichten eine Verschiebung des Maximums zu höheren Spannungen aufweisen.

In einem Punkte unterscheiden sich allerdings die formierten SE-Schichten wesentlich von den reinen Metalloberflächen, wie Versuche an verschiedenen Proben

zeigen. Sie besitzen einen deutlichen, negativen Temperaturkoeffizienten. Abb. 5 gibt eine Vorstellung von der Größe des Effektes. Sie zeigt die SE-Kurve einer

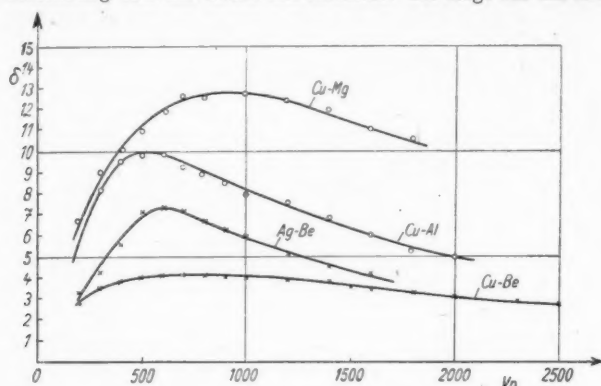


Abb. 3. Abhängigkeit des SE-Faktors δ von der Geschwindigkeit der Primärelektronen V_p in Volt für verschiedene Metallmischungen. Die Schichten (von oben nach unten) enthalten: Cu + 10% Mg; Cu + 5% Al; Ag + 15% Be; Cu + 2,3% Be. Die CuBe-Schicht ist überformiert

oxydierten und formierten Mg-Schicht auf Ta bei Zimmertemperatur und bei 340° C. Im Mittel nimmt der δ -Wert bei der Temperaturdifferenz von 320° um 3,2% ab. Jeder einzelne Meßpunkt wurde mehrmals bei den verschiedenen Tem-

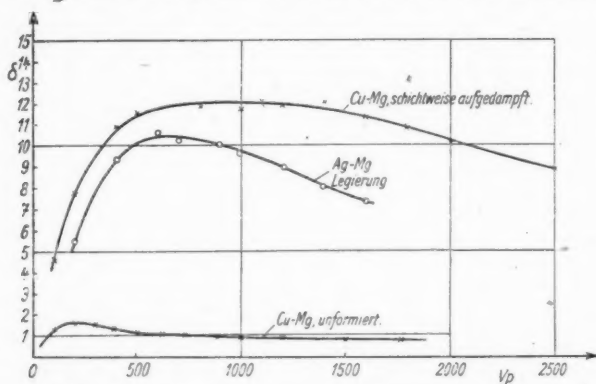


Abb. 4. Abhängigkeit des SE-Faktors δ von der Geschwindigkeit der Primärelektronen V_p in Volt für eine CuMg-Schicht, bei der im Wechsel auf eine 100 Å dicke Cu-Schicht eine 50 Å dicke Mg-Schicht folgt (die oberste Schicht besteht aus Mg), für eine Ag-Mg-Legierung (Ag + 50% Mg), für eine unformierte Cu-Mg-Schicht (Cu + 10% Mg)

peraturen gemessen, um den kleinen Effekt mit höherer Genauigkeit zu erfassen. Dabei wurde die relativ kleine Temperaturänderung der Schicht nur durch Wärmestrahlung vorgenommen, um einerseits eine elektrische Beeinflussung der Faktor-

Abb. 5
einer

messung zu vermeiden und andererseits auch ein minimales Formieren der Schicht, das bei höheren Temperaturen auftreten könnte, auszuschließen.

Auch die aufgedampften Metallmischungen und die Legierungen zeigen im formierten Zustand den gleichen negativen Temperaturkoeffizienten. Z. B. ergaben die Ag—Mg-Legierung für die Temperaturdifferenz von 320° einen Effekt von 2,5% und die Cu—Mg-Schicht einen Effekt von 3,1%, der durch weitere Oxydation der Schicht auf 4,3% anstieg. Der gemessene Temperaturkoeffizient von rund 0,01% pro $^\circ\text{C}$ kann nur den formierten Schichten zugeschrieben werden. Reine Metalloberflächen und unbehandelte Schichten besitzen keine Temperaturabhängigkeit des SE-Faktors, wie Kontrollversuche ergaben.

Zeitliche Verzögerungen bei der Auslösung der Sekundärelektronen wurden an keiner Schicht wahrgenommen. Solche Trägheitseffekte konnten leider nur

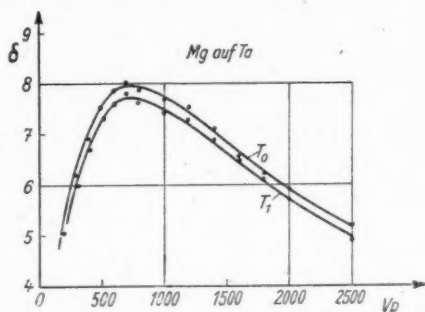


Abb. 5. Die Sekundäremissionskurve (SE-Faktor δ gegen die Voltgeschwindigkeit V_p der Primärelektronen aufgetragen) einer formierten Mg-Schicht auf Ta bei verschiedenen Temperaturen. $T_0 = 20^\circ\text{C}$ und $T_1 = 340^\circ\text{C}$

bis zu 300 kHz gesucht werden, da der Primärelektronenstrahl mit höheren Frequenzen nicht mehr moduliert werden konnte. Jedenfalls traten bei 300 kHz keine nachweisbaren Verzögerungen auf. Man darf wohl annehmen, daß auch noch wesentlich höhere Frequenzen von den beschriebenen SE-Schichten ohne Trägheitseffekte übertragen werden können.

Gegen eine elektrische Belastung verhalten sich die Schichten im richtig formierten Zustand stabil. Es wurde eine Reihe von Versuchen, vornehmlich an Mg—Cu-Schichten, durchgeführt, bei denen eine Kreisfläche von 3 mm Durchmesser bei 500 Volt einer spezifischen elektrischen Belastung von $\frac{1 \text{ Watt}}{\text{cm}^2}$ ausgesetzt war. Diese Belastungen wurden bis zu 70 Stunden ausgedehnt, ohne daß ein Absinken des SE-Faktors beobachtet werden konnte. Von großer Bedeutung für die elektrische Stabilität ist der Formierungszustand der Schicht. Mg—Cu-Mischungen liefern auch hier die besten Resultate.

Trockene und CO_2 freie Luft greift die Schicht nur langsam an. So sinkt der formierte SE-Faktor einer Mg—Cu-Schicht nach Einwirkung von trockener Luft z. B. von 10,3 auf 9,6. Normale feuchte und CO_2 haltige Luft ist wirksamer, nach 2 Tagen nehmen die Faktoren um 20% ab, nach weiteren 3 Tagen erneut um 10%.

⁶⁾ D. E. Wooldridge, Theory of Secondary emission. Physic. Rev. 56, 562 (1939).

Trockene Gase, wie Ar, N₂ haben nur geringen Einfluß, während Wasserdampf die formierten Schichten sehr schnell zerstört. Mit reinem CO₂ behandelte Schichten verlieren ihre Faktoren in wenigen Minuten, sie lassen sich aber durch einfaches Heizen regenerieren. Es kann sich also bei der CO₂-Einwirkung nur um einen Oberflächeneffekt handeln, der keinen ernstlichen Eingriff in das Gefüge der Schicht vorstellt.

Deutung der Versuchsergebnisse

Für die Bildung von Sekundärelektronen an der Oberfläche fester Körper bei Elektronenbeschuß sind 2 Prozesse im Innern der Materie von wesentlicher Bedeutung. Einmal die Bildung von angeregten sekundären Elektronen durch die primären, das andere Mal die Streuung und Absorption der Sekundärelektronen im Körper selbst. Vom ersten Prozeß wissen wir aus theoretischen Gründen⁷⁾ und experimentellen Beobachtungen⁸⁾, daß die Primärelektronen ihre Energie in kleinen Beträgen von 5 bis 20 Volt an die freien oder gebundenen Elektronen des Festkörpers abgeben, bis ihre eigene Energie aufgezehrt ist. Dabei ist es gleichgültig, ob es sich um Metalle, Isolatoren oder Halbleiter handelt. Die Prozesse der Streuung und Absorption sind dagegen im hohen Maße vom Aufbau des Festkörpers abhängig⁹⁾. Die angeregten Elektronen treten nämlich mit anderen Elektronen oder mit dem Gitter in Wechselwirkung und verlieren dabei ihre Energie. Sie verlassen entweder den Körper als Sekundärelektronen oder erwärmen das Gitter und fallen auf ihre Ausgangsniveaus zurück.

In den Metallen werden im weit überwiegenden Maße die freien Leitungselektronen durch die primären Elektronen angeregt. Wegen des Impulserhaltungssatzes haben die angeregten Elektronen zunächst die gleiche Richtung wie die primären, sie werden also ins Innere des Metalles beschleunigt. Erst infolge elastischer Reflexionen am Metallgitter oder durch weitere Stöße mit Leitungselektronen laufen sie nach allen Seiten auseinander. Wegen der verschwindend kleinen Masse der Elektronen gegenüber den Gitterbausteinen ist nur der Stoß Elektron-Elektron für eine Energieabgabe wirksam. Die Anregungsenergie wird rasch auf weitere Leitungselektronen übertragen, bis sie nicht mehr hinreicht, die Austrittsarbeit zu überwinden. Die Sekundärelektronen sind also im Metall einer schnellen Dissipation ihrer Energie und damit einer starken Absorption unterworfen. Dadurch wird verständlich, daß die SE-Faktoren der reinen Metalloberflächen alle in der Nähe von Eins liegen. Bei den Alkali- und Erdalkalimetallen treten sogar weniger Elektronen aus der Oberfläche aus als auftreffen, ihr SE-Faktor ist stets kleiner als Eins. Der höchste an reiner Metalloberfläche überhaupt vorkommende Faktor beträgt $\delta = 1,8$ für Platin bei $V_p = 700$ Volt. Der geringen Wechselwirkung der Sekundärelektronen mit dem Metallgitter entspricht die Tatsache, daß sich eine Temperaturabhängigkeit des SE-Faktors bisher an keiner Stelle hat nachweisen lassen.

Anders liegt der Fall bei Isolatoren, hier gibt es kein frei bewegliches Elektronengas. Die Primärelektronen treten mit den gebundenen Elektronen oder dem

⁷⁾ G. Maurer, Die Sekundärelektronenemission von Halbleitern bzw. Isolatoren. Z. Physik 118, 122 (1941).

⁸⁾ W. Lang, Geschwindigkeitsverluste mittelschneller Elektronen beim Durchgang durch dünne Metallfolien. Optik 3, 233 (1948).

⁹⁾ O. Hachenberg, Absorption der im Festkörper ausgelösten Sekundärelektronen auf ihrem Weg zur Oberfläche. Ann. Physik, 6. Folge, 2, 404 (1948).

Atomgitter in Wechselwirkung. Die angeregten Elektronen verlieren ihre Energie nicht so rasch wie im Metall, da sie diese nur als Gitterschwingungsquanten oder an Fehlstellen im Gitter abgeben können. Wir finden geringere Elektronenabsorption und damit höhere SE-Faktoren. So zeigen Glimmer, Quarz und Glas bereits SE-Faktoren in der Nähe von 3^{10} , während Alkalihalogenuide Faktoren von 10 und darüber erreichen ^{6) 11)}. Wegen der stärkeren Gitterwechselwirkung werden die SE-Faktoren temperaturabhängig. So läßt sich für KCl eine starke negative Temperaturabhängigkeit nachweisen ¹¹⁾, derart, daß der SE-Faktor proportional mit $1/T$ zunimmt, wie sich auch rechnerisch begründen läßt ⁹⁾.

Die Halbleiter nehmen in dieser Einordnung eine Zwischenstellung ein. In ihnen ist im allgemeinen die durch Störzentren oder innere Emission hervorgerufene Zahl von Leitungselektronen nicht so groß, daß sie wesentlich zur Absorption der Sekundärelektronen beitragen könnten. Andererseits können die angeregten Elektronen die gebundenen Elektronen in das meist nahegelegene Leitfähigkeitsband anheben oder mit den Störzentren selbst in Wechselwirkung treten und so ihre Energie abgeben. Gitterbaufehler und eingebaute Fremdatome üben nun verschiedenartige Wirkung auf die Sekundärelektronen aus. So konnten Hachenberg, Knoll und Randmer ¹¹⁾ im NaCl und KCl bei einer F-Zentren-dichte von 10^{18} pro cm^3 eine 5proz. Abnahme der Sekundäremission beobachten. Im Gegensatz dazu finden Geyer ¹²⁾ und Suhrman und Berger ¹³⁾ eine beträchtliche Steigerung der Sekundäremission, wenn sie Fremdatome, vorzugsweise Cs, in das Grundgitter einbauen. Es scheinen also Störzentren mit mehr elektronegativem Charakter (F-Zentren) die Sekundärelektronen zu hemmen, während Störstellen mit elektropositivem Charakter (Cs-Atome) die Sekundäremission fördern. Man wird demnach für Halbleiter sehr unterschiedliche SE-Faktoren erwarten dürfen, wie das auch der Fall ist. Wegen der hier stets vorhandenen Wechselwirkung mit dem Atomgitter sollte auch eine Temperaturabhängigkeit des SE-Faktors vorliegen. Sie dürfte allerdings nicht immer klar herausgearbeitet werden können, da die Halbleiterschichten vielfach schon von sich aus temperaturempfindlich sind und Störstellengehalt und Zahl der Leitungselektronen selbst von der Temperatur abhängen.

Nach diesen allgemeinen Überlegungen ist die Einordnung der im Anfang beschriebenen Metallmischungen und Legierungen in das hier aufgestellte Schema nicht mehr schwierig. Im unformierten Zustand zeigen alle aufgedampften Schichten und Legierungen metallische Leitfähigkeit. Ihr SE-Faktor ist daher sehr klein, er liegt in der Nähe von Eins, während das Maximum der SE-Kurven bei $V_p = 200$ Volt erreicht wird (vgl. Abb. 4). Sobald aber die Schichten formiert sind, liegen die SE-Faktoren sehr hoch, das Maximum der SE-Kurve tritt bei etwa 600 Volt auf. Der absorbierende Einfluß der Leitungselektronen auf die angeregten Sekundärelektronen ist jetzt ausgeschaltet. Es sind in der Schicht halbleitende oder sogar isolierende Bereiche, in denen die Zahl der frei beweglichen Elektronen sehr klein oder sogar Null geworden ist, entstanden. Die Verschiebung

¹⁰⁾ H. Salow, Über den Sekundäremissionsfaktor elektronenbestrahlter Isolatoren. Z. techn. Physik **21**, 9 (1940).

¹¹⁾ M. Knoll, O. Hachenberg u. J. Randmer, Zum Mechanismus der Sekundäremission im Innern von Ionenkristallen. Z. Physik **122**, 137 (1944).

¹²⁾ K. H. Geyer, Beobachtung an der Sekundärelektronenstrahlung aus Nichtleitern. Ann Physik **42**, 241 (1942).

¹³⁾ R. Suhrmann u. W. Berger, Über die Emissionszentren der Sekundär-Emission von aufgedampften Alkalikarbonatschichten. Z. Physik **123**, 73 (1944).

des Maximums der SE-Kurve läßt sich nach einer von Salow¹⁴⁾ und Bruining¹⁵⁾ durchgeführten Rechnung verstehen, nach der das Maximum V_m der SE-Kurve mit den Konstanten a des Widdington-Thomsonschen Gesetzes für die Eindringtiefe der Primärelektronen und der Absorptionskonstanten α der Sekundärelektronen in folgender Art verknüpft ist. Danach gilt: $V_m = 0,92 \left(\frac{a}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}$. Nun sollte beim Übergang vom unbehandelten in den formierten Zustand der Wert von a nur um den Faktor 1,5, der sich aus der Dichteänderung abschätzen läßt, zunehmen. Einer Verschiebung des Maximums V_m um den Faktor 3 (von $V_m = 200$ Volt auf $V_m = 600$ Volt) würde also einer Abnahme der Absorptionskonstanten um einen Faktor 6 entsprechen. Wir dürfen daher in dieser Verlagerung des Maximums einen experimentellen Ausdruck für die Ausschaltung der Leitungselektronen und für die damit verbundene wesentliche Verminderung der Sekundärelektronenabsorption sehen. Es können angeregte Elektronen noch aus weit tieferen Schichten als vordem die Oberfläche erreichen und verlassen. Hierdurch wird auch die Tatsache erklärt, daß sich für stark oxydierte Schichten das Maximum V_m zu noch höheren Spannungen verschiebt.

Im gleichen Sinne muß das Auftreten des Temperaturkoeffizienten der Sekundäremission nach dem Formieren gedeutet werden. Der verminderte Einfluß der Leitungselektronen läßt die Gitterstreuung der Sekundärelektronen hervortreten. Da die Temperaturempfindlichkeit in einem Temperaturgebiet nachgewiesen wurde, in dem ein Formieren der Schichten nicht eintritt, so wird man es hier mit einer Beeinflussung des Sekundäremissionsvorhanges durch reine Gitterstreuung zu tun haben, für die ein $1/T$ -Gesetz gelten sollte. Ob dieses Gesetz erfüllt ist, läßt sich bei der Kleinheit des Effektes und des untersuchten Temperaturbereiches natürlich nicht feststellen. Immerhin wird man aus dem kleinen Temperaturkoeffizienten des SE-Faktors von 0,01% pro °C schließen dürfen, daß die formierten Schichten halbleitenden Charakter haben, bei denen wegen der großen Mannigfaltigkeit von Streuprozessen die reine Gitterstreuung nicht den starken Einfluß wie bei den Isolatoren ausüben kann. Hiermit stimmt überein, daß sich keine Anzeichen für isolierende Bezirke nachweisen ließen. Solche isolierenden Zentren in den sekundäremittierenden Schichten sollten sich in Trägheitseffekten, z. B. in einer verzögerten oder feldabhängigen Emission bemerkbar machen. Spuren derartiger zeitabhängiger Emission konnten nicht gefunden werden. Wir fassen also die formierten Kathoden als reine halbleitende Schichten auf.

Eine Analyse des Formierungsvorganges soll den Aufbau der Schichten noch näher kennzeichnen. Um die halbleitenden und gutemittierenden Eigenschaften der Schichten zu gewinnen, muß Sauerstoff und Erwärmung gleichzeitig zur Anwendung kommen. Temperaturbehandlung ohne Sauerstoffzufuhr genügt ebenso wenig wie Oxydation der Schichten ohne Erwärmung. Es muß sich also bei der Formierung um eine Oxydation der leichten und schweren Komponente (mit Ausnahme von Silber) handeln, die bei höheren Temperaturen abläuft. Das wird auch durch die Verfärbung der Oberflächen bestätigt. Die Metalle dürfen allerdings nicht restlos in das Oxyd verwandelt werden. Ein zu starker Sauerstoffgehalt in der Schicht setzt die SE-Eigenschaften wieder herab. Es gibt die Erscheinung der

¹⁴⁾ H. Salow, Über die Winkelabhängigkeit der Sekundärelektronenemission von Isolatoren. *Physik. Z.* **19**, 8 (1940).

¹⁵⁾ H. Bruining, Die Sekundär-Elektronen-Emission fester Körper, Berlin 1942. S. 65.

Überoxydation. Ebenso ist eine Überformierung durch zu hohe und lange Temperaturanwendung möglich. Ein Zerfall des Oxyds ist dabei selbst bei den höchsten angewandten Temperaturen nicht zu erwarten. Es kommt vielmehr auf eine bestimmte Konzentration des freien Metalles zum Metalloxyd an. Dies Konzentrationsverhältnis wird bei der Überoxydation durch einen Sauerstoffüberschuß bei der Überformierung durch Heraudampfen der leichten Metallkomponente, also durch einen Metallunterschluß gestört. Mit diesem Bild stimmt gut überein, daß man durch Nachdampfen der Erdalkalikomponente und erneutes Formieren, in beiden Fällen, den überoxydierten und überformierten Zustand aufheben und die hohen SE-Faktoren wiedererhalten kann. Die Konzentration der metallischen Komponente innerhalb des Oxydes dürfte einen weiten Spielraum besitzen, da einerseits sehr geringe Sauerstoffmengen zur Formierung ausreichen, andererseits sehr kleine Mengen der Leichtmetallkomponente den überformierten Zustand aufheben.

Um etwa doch vorhandene Konzentrationseinflüsse der beiden Metallkomponenten sicher zu erfassen, wurden auf eine Grundplatte Mg und Cu im Wechsel aufgedampft derart, daß eine Cu-Schicht von 100 Å Dicke mit einer Mg-Schicht von 50 Å Dicke abwechselte. Diese geschichteten Kathoden verhielten sich genau wie die gleichmäßig gemischten, vorausgesetzt, daß die oberste, dem Vakuum zugewandte Lage aus Mg bestand. Auch in diesen Schichten wird sich die vorteilhafte Konzentration von Metall und Oxyd automatisch durch den Formierungsprozeß einstellen, wobei ein Teil des überschüssigen Mg an der Oberfläche in das Kupfer hineindiffundiert, ein anderer Teil abdampft. Aus diesem Versuch geht klar hervor, daß das Konzentrationsverhältnis vom Cu zum Mg für die Bildung hoher SE-Faktoren in diesen Schichten keine Bedeutung besitzt. Das Entscheidende bleibt die metallische Komponente des Mg innerhalb des mehr oder weniger stark oxydierten Grundgitters.

Bei der Formierung der Metallmischungen wie der Legierungen fällt die Tatsache auf, daß eine sehr scharfe Temperaturgrenze besteht, bei der die Formierung einsetzt. So genügt z. B. eine zweistündige Erhitzung einer Mg-Cu-Schicht auf 520° C in Anwesenheit von Sauerstoff nicht, um den SE-Faktor auch nur wenig zu steigern, während eine Temperatur von 570° C hinreicht, den ganzen Formierungsvorgang in 20 Minuten ablaufen zu lassen. Wegen des niedrigen Schmelzpunktes von Mg und Al — sie werden bei 657 und 658° C flüssig — darf man wohl mindestens für diese beiden Metalle bei den Formierungstemperaturen eine beträchtliche Beweglichkeit ihrer Atome im Grundgitter annehmen.

Der Formierungsvorgang besteht dann zunächst darin, daß eine mehr oder weniger große Menge Sauerstoff von den einzelnen Mikrokristallen der beiden Komponenten aufgenommen wird, die freien Leitungselektronen werden dabei in im Kristallgitter gebundene Elektronen verwandelt. Es bleiben bei diesem Prozeß genug freie Metallatome zurück, vornehmlich die Erdalkalimetalle, die nun von einer bestimmten Temperatur an, der Formierungstemperatur, eine so große Beweglichkeit besitzen, daß sie in das Oxydgitter einwandern und an solchen Stellen gebunden werden, an denen sie elektronenspendende Störstellen darstellen. Wegen des elektropositiven Charakters dieser Störzentren können die zunächst von den Primärelektronen angeregten Elektronen in ihnen besonders leicht die Sekundärelektronen auslösen. Die Erdalkalimetalle übernehmen also hier die gleiche Rolle, wie sie z. B. Cs-Atome in den sekundäremittierenden Ag—Cs₂O—Cs-Kathoden spielen, mit denen überhaupt die hier behandelten Schichten im Aufbau

eine gewisse Ähnlichkeit besitzen. Wegen des höheren Schmelzpunktes der Erdalkalimetalle und wegen ihres schwächeren elektropositiven Verhaltens gegenüber den Alkalimetallen werden die auf der Erdalkalibasis aufgebauten Schichten (sowohl die aufgedampften Metallmischungen wie die Legierungen) thermisch und elektrisch stabiler und gegen Sauerstoff unempfindlicher als solche, die auf Alkalibasis, insbesondere mit Cs zusammengesetzt sind¹⁶⁾.

Zum Schluß soll noch mit wenigen Worten auf die Strukturunterschiede zwischen den Metallmischungen und den Legierungen und ihren im Anfang vermuteten Einfluß auf die Sekundäremissionseigenschaften eingegangen werden.

Die Metallmischungen können im frisch aufgedampften Zustand als feinkristalline Zusammensetzung von Mikrokristallen der beiden Komponenten aufgefaßt werden. Ein völlig regelloses Zusammenliegen der einzelnen Metallatome in dichter Kugelpackung, die dem amorphen Zustand entspricht, darf wegen der ausgeprägten metallischen Leitfähigkeit nicht angenommen werden. Die Legierungen unterscheiden sich von den aufgedampften Metallmischungen durch eine weit gleichmäßigere Anordnung und vollkommeneren Durchmischung ihrer Atome. Ein deutlicher Einfluß dieser Strukturunterschiede auf die Sekundäremissionseigenschaften, wie er anfangs vermutet wurde, läßt sich aus den angeführten Experimenten nicht entnehmen. Legierungen wie die Metallmischungen ergeben praktisch die gleichen Resultate. Die leichtere Formierbarkeit der letzteren und ihre größere Stabilität dürften darauf zurückzuführen sein, daß schon durch den Verdampfungsvorgang eine große Bildungsmöglichkeit von Störzentren vorgegeben wird, da eine feinkristalline Struktur eine weit größere Zahl von Kristallgrenzen oder Fehlstellen im Kristallgefüge enthält, an denen bevorzugt der Einbau sekundärelektronenspendender Zentren vor sich gehen kann, als eine grobkristalline, wie sie den Legierungen entspricht. Die Annahme von Gille, daß insbesondere solche Legierungen, die Auskristallisation der Erdalkalikomponente zeigen, zur Bildung von hochemittierenden SE-Kathoden befähigt sind, kann durch die vorliegenden Experimente nicht bestätigt werden.

¹⁶⁾ Die mit Erdalkaliatomen gezüchteten Sekundäremissionskathoden dürften in technischer Hinsicht den Cs-Kathoden überlegen sein.

Bargtheide, Fernmeldetechnisches Zentralamt,

(Bei der Redaktion eingegangen am 11. Oktober 1949.)

Namenregister 1949/50

6. Folge, Band 5—6

B

Bagge, Erich u. Fincke, Karl, Die Intensitätsverteilung der Höhenstrahlungsneutronen in der Atmosphäre 6, 321.

Bechert, Karl, Zur Theorie der Verbrennungsgeschwindigkeit. II. Reaktion zwischen ungleichen Teilchen, Kohlenwasserstoffverbrennung 5, 349.

Bothe, W., Einige einfache Überlegungen zur Rückdiffusion schneller Elektronen 6, 44.

Braunbek, Werner, Energieströmung im Nahfeld einer beugenden Karte 6, 53.

Broser, Immanuel, Über die Streuung und Absorption des Lumineszenzlichtes in polykristallinen Leuchtstoffschichten bei Anregung mit energiereichen Quanten- und Korpuskularstrahlen 5, 402.

Busz, G. u. Schulz, P., Über die Druckabhängigkeit des Kontinuums im Quecksilberhochdruckbogen 6, 232.

Burkhardt, G., Dispersionsvermögen und Eigenschwingungen eines ionisierten Gases 5, 373.

D

Döring, W., Die Geschwindigkeit und Struktur von intensiven Stoßwellen in Gasen 5, 133. — Zur Definition des magnetischen Momentes 6, 69.

Ann. Physik. 6. Folge, Bd. 6

Dornberger-Schiff, Käte, Zur Deutung der Röntgendiagramme gewisser Eiweißstoffe, I. 5, 14.

F

Fassbender, J., Über die photoelektrischen Eigenschaften von Kadmiumsulfid-Einkristallen 5, 33.

Fassbender, J. u. Lehmann, H., Berechnung von Elektronenbeweglichkeiten in Cadmiumsulfid-Einkristallen aus Wechsellichtmessungen 6, 215.

Fassbender, J. u. Hachenberg, O., Zur Leitfähigkeitsänderung von Cadmiumsulfideinkristallen bei Bestrahlung mit Röntgenstrahlen 6, 229.

Fincke, Karl, vgl. Bagge, Erich 6, 321.

Fischer, Erich, Zur inneren Feld-Theorie und Untersuchungsmethodik der dielektrischen Relaxation in Dipolflüssigkeiten 6, 117.

v. Fragstein, Conrad vgl. Schaefer, Clemens 6, 39.

Fues, E. u. Riedel, H., Zur Theorie der Kikuchibänder 6, 105.

G

Gierer, A. u. Wirtz, K., Anomale H^+ - und OH^- -Ionenbeweglichkeit im Wasser 6, 257.

Goos, F. u. Lindberg-Hänchen, Hilda, Neumessung des Strahlversetzungseffektes bei Totalreflexion 5, 251.

H

Hachenberg, O. vgl. Fassbender, J. 6, 229.

Höcker, K. H. und Schopper, E., Zur auslösenden Komponente der Kernzertrümmerungen der Ultrastrahlung 6, 338.

Höcker, K. H., Die Komponenten der kosmischen Strahlung und ihre Intensitäten in der Atmosphäre 6, 353.

Hönl, H., Zwei Bemerkungen zum kosmologischen Problem 6, 169.

J

Jahn, Helmut u. Kopfermann, Hans, Zur Theorie der Radialschwingungen der Elektronen in einer Elektronenschleuder 6, 305.

Jünge, W. vgl. Steubing, W. 5, 108.

K

Kneser, H. O., Druck- und Schubviskosität in Gasen 6, 253.

Kochendörfer, Albert vgl. Wagner, Gustav 6, 129.

Kohler, Max, Magnetische Widerstandsänderung und Leitfähigkeitstypen I 5, 89. — Magnetische Widerstandsänderung und Leitfähigkeitstypen II 5, 99. — Wärmeleitung der Metalle im starken Magnetfeld 5, 181. — Theorie der magnetischen Widerstandseffekte in Metallen 6, 18.

Kopfermann, Hans vgl. Jahn, Helmut 6, 305.

Koppe, Heinz, Zur Theorie der unvollständigen Supraleitung 6, 375.

Kossel, W., Zur Lenkung von Strahlenbündeln innerhalb atomistischer Dimensionen 6, 97.

L

v. Laue, M., Eine nicht-lineare, phänomenologische Theorie der Supraleitung 5, 197. — Widmung zu seinem 70. Geburtstag 6, 1.

Lehmann, H. vgl. Fassbender, J. 6, 215.

Lindberg-Hänchen, Hilda vgl. Goos, F. 5, 251.

Lösche, Arthur, Über den Einfluß von Drehfeldern auf den Ordnungszustand von Molekülen in Gasen und Flüssigkeiten 5, 381.

M

Meixner, J., Die Kantenbedingung in der Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an vollkommen leitenden ebenen Schirmen 6, 2.

Menzel, Erich, Die Verwachsungen von Kupfer mit seinem Oxydul 5, 163.

Möglich, F. u. Rompe, R., Zur Theorie der Supraleitung 6, 177.

Molière, G., Laufende elektromagnetische Multipolwellen und eine neue Methode der Feld-Quantisierung 6, 146.

P

Päsler, Max, Behandlung des Raumrotators im Unterbereich der Laplace-Transformation 6, 365.

Picht, Johannes, Beitrag zur Theorie der optischen Schallanalyse 5, 117.

Pohl, R. W. u. Stöckmann, F., Zur Verstärkung von Elektronenströmen in bestrahlten Kristallen 6, 89.

Pohlack, Hubert, Analytische und graphische Methoden zur Lösung optischer Interferenzprobleme bei dünnen Schichten 5, 311.

Pollermann, M., Die Tröpfchenbildung an Ionen in der Wilsonschen Nebelkammer 5, 329.

Reinebeck, L. vgl. Schüler, H. 6, 110.

Riedel, H. vgl. Fues, E. 6, 105.

Rompe, R. vgl. Möglich, F. 6, 177.

Rubbert, F. K., Zur Theorie des momentfreien Kreisels 5, 237.

S

Salow, H., Die Sekundärelektronenemission von Metallmischungen 5, 417.

Sauter, Fritz, Über die Zustandsgleichung verdünnter realer Gase 6, 59.

Schaefer, Clemens u. v. Fragstein, Conrad, Zur Theorie der Reflexion und Brechung 6, 39.

Schenkel, Gerhard, vgl. Schlomka, Teodor 5, 51.

Schlomka, Teodor u. Schenkel, Gerhard, Relativitätstheorie und Unipolarinduktion 5, 51.

Schlomka, Teodor, Die elektrischen und magnetischen Flächenwirbel bei bewegten Körpern 5, 190.

Schön, Michael, Berichtigung zur Arbeit „Zur Kinetik des Leuchtens von Sulfidphosphoren mit mehreren Aktivatoren“, Ann. Physik (6) 3, 333 (1948) 5, 252.

Schopper, E. vgl. Höcker, K. H. 6, 338.

Schottky, Walter, Das Herkunfts- und Stoßzeitproblem in der Elektronentheorie der Festleiter 6, 193.

Schubert, Gerhard U., Abkühl- und Einschaltvorgänge an Supraleitern nach der von Laueschen Theorie 5, 213. — Der Energie-Impulstensor in der von Laue-Londonschen Elektrodynamik des Supraleiters 6, 163.

Schüler, H., Reinebeck, L. u. Woelldicke, A., Über die Bedeutung der

Elektronenstoßanregung für die Dynamik der Molekülfelder organischer Verbindungen 6, 110.

Schulz, P. vgl. Busz, G. 6, 232.

Schwan, Hermann, Die Bestimmung der dielektrischen und magnetischen Eigenschaften inhomogener Dielektrika, insbesondere biologischer Körper, im Dezimeterwellenbereich. I. Theoretische Behandlung der Resonanzverfahren zur Bestimmung komplexer Widerstände und Materialien bei Dezimeterwellen 5, 253. — II. Der Einfluß von Halterungen am Ende von Lecherleitungen 5, 268. — III. Auswertverfahren zur Bestimmung der elektrischen und magnetischen Stoffkonstanten im Dezimeterwellengebiet 5, 287.

Seeliger, R., Die Diffusionstheorie der positiven Säule in elektronegativen Gasen 6, 93.

Seifert, H., Über die Gleitfähigkeit der metallischen Strukturen der Magnesiumgruppe 6, 10.

Seiwert, Rolf, Thermische Verschiebung der langwelligen Grenze der Grundgitterabsorption von Cadmiumsulfid 6, 241.

Stasiw, O., Zur Fehlordnung und Photochemie des Silberbromids mit Zusätzen 5, 151.

Steubing, W. u. Junge, W., Der Stark-Effekt der Balmerreihe des Wasserstoffs bei niedrigen Feldstärken 5, 108.

Stille, U., „Natürliche Maßeinheiten“ und Elektrodynamik 5, 208.

Stöckmann, F. vgl. Pohl, R. W. 6, 89.

T

Teltow, J., Zur Ionenleitung und Fehlordnung von Silberbromid mit Zusätzen zweiwertiger Kationen. — I. Leitfähigkeitsmessungen und Zustandsdiagramm-

me 5, 63. — II. Quantitative Deutung der Leitfähigkeitsisothermen 5, 71.

W

Wagner, Gustav u. Kochendörfer, Albert, Messung der diffusen Streuung von Röntgenstrahlen an Kristallen und ihrer Beeinflussung durch eine plastische Verformung mit dem Interferenzzählrohr 6, 129.

v. Weizsäcker, C. F., Eine Bemerkung über die Grundlagen der Mechanik 6, 67.

Welker, H., Über den Zusammenhang zwischen der Supraleitung und der gemischten Leitung 5, 1.

Wirtz, K. vgl. Gierer, A. 6, 257.

Woeldike, A. vgl. Schüler, H. 6, 110.

Verantwortlich

für die Schriftleitung: Prof. Dr. Friedrich Möglich, Berlin-Buch, Lindenberger Weg 74
 für den Anzeigenteil: Ernst Wöllnitz (Arbeitsgemeinschaft medizinischer
 Verlage G. m. b. H.), Berlin C 2, Neue Grünstraße 18, Fernruf: 42 30 97
 Verlag: Johann Ambrosius Barth, Leipzig C 1, Salomonstr. 18 B, Fernruf: 63105, 63781
 (1) Paul Dünnhaupt, Köthen L 149 Lizenz-Nr. 410 / G. N. 419

kung
ik 6,

hang
er ge-

, 110.

Weg 74
er

63781
3.N.449